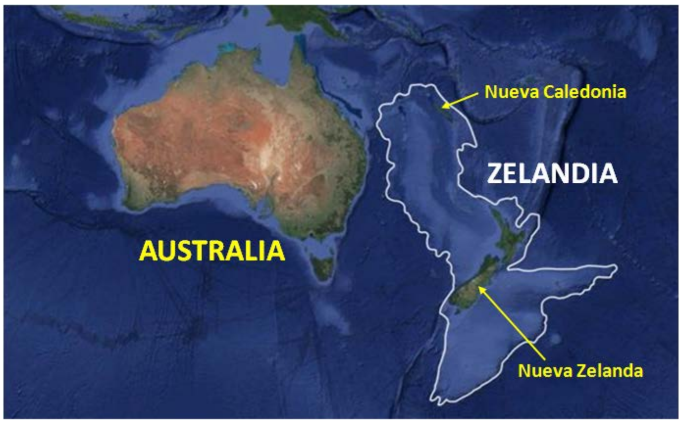
P1. Zelandia

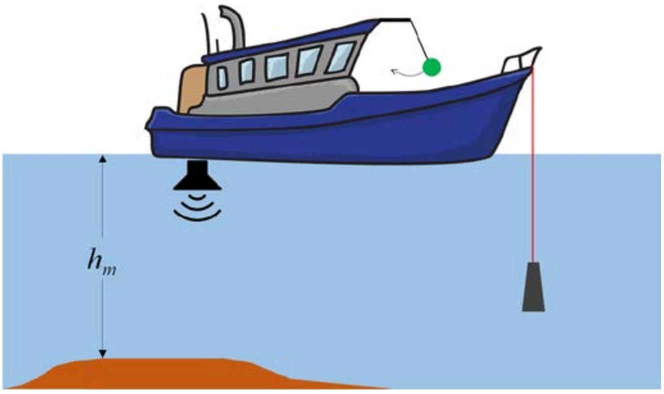
En 2017 un equipo de geólogos demostró que existe otro continente bajo las aguas del Pacífico. Se trata de Zelandia. El 94% de su superficie está hundida en el océano, sólo asoman las islas de Nueva Zelanda y Nueva Caledonia, que son sus montañas más altas. Zelandia está unida por el norte a Australia y por el sur a la Antártida, tiene forma alargada y es diez veces más grande que España. Hace unos cien millones de años empezó a desgajarse de la gran masa continental a la que pertenecía. Su corteza se fue estirando y disminuyó su espesor, como la masa de una pizza, hasta que quedó sumergida. Recientemente, los científicos han terminado de cartografiar su contorno y de topografiar su relieve.



El estudio de las profundidades marinas se llama *batimetría*. Las primeras técnicas batimétricas consistían en descolgar por el lateral de un barco una cuerda con un peso, llamado *escandallo*, hasta que éste tocaba el fondo. En el siglo XX surgieron las ecosondas, sistemas de *sonar* que emiten ultrasonidos y miden la profundidad del mar a partir de la reflexión acústica. En las últimas décadas se ha desarrollado la batimetría satelital, que permite reconstruir el relieve oceánico a partir del nivel del mar medido con *radar* desde satélites. Este método se basa en el hecho de que, debido a la gravedad, la superficie del mar se distorsiona cuando la distribución de masa de la corteza oceánica presenta irregularidades.

a) De un barco cuelga una cuerda en cuyo extremo sumergido hay un escandallo de plomo que aún no ha tocado el fondo. Sabiendo que la densidad del plomo es 11 veces mayor que la densidad del agua marina, calcule la tensión de la cuerda en función del peso del escandallo.

b) El barco posee un sonar que emite ondas sonoras de 12 kHz de frecuencia. Cuando navega sobre una meseta de Zelandia, el sonar registra el eco del sonido 2,4 s después de ser emitido. Sabemos que la velocidad del sonido en el agua marina es 1500 m/s. Calcule la profundidad h_m de la meseta.



El fondo del Pacífico donde está Zelandia tiene una profundidad de entre 4 y 5 km. Sin embargo, Zelandia se eleva bastante por encima de ese nivel, estando la mayor parte de su superficie sumergida a una profundidad de entre 1 y 2 km. Zelandia tiene una extensión de 4,9 millones de km^2.

c) Calcule cuál es la masa aproximada de Zelandia que se levanta por encima del fondo oceánico. Dato: densidad de Zelandia = 3000 kg/m^3.

Por simplicidad, considere que Zelandia es un disco plano situado a una profundidad equivalente a la mitad de su altura media. Como su superficie es mucho mayor que la profundidad del océano, podemos suponer que Zelandia es un plano infinito desde el punto de vista gravitatorio.

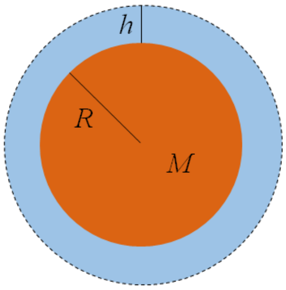
d) Calcule el valor de la gravedad que crea Zelandia en el barco. (Recuerde que la gravedad que crea un plano infinito es $2\pi G\sigma$, donde σ es la densidad superficial de masa). $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

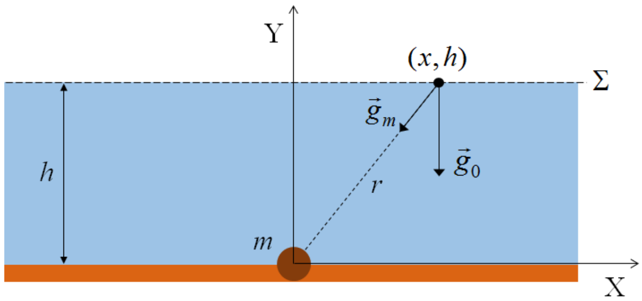
e) El barco lleva a bordo un gravímetro que consiste en un péndulo simple de 1 m de longitud. ¿Qué diferencia habrá en el período del péndulo respecto a una región con gravedad estándar? Dato: gravedad estándar $g_0 = 9{,}80665$ m/s^2.

La superficie del mar es una superficie equipotencial, es decir, a lo largo de ella el potencial gravitatorio es constante, y es, por tanto, perpendicular al campo gravitatorio en cada punto.

f) Demuestre que si la Tierra fuera perfectamente esférica y de densidad uniforme, la superficie del mar sería esférica[1].

Para entender cómo las irregularidades de la corteza oceánica perturban la superficie del mar, vamos a estudiar el efecto de una masa puntual *m* situada en el fondo del océano. Llamaremos Σ a la superficie del mar en el caso ideal (es decir, cuando la Tierra es esférica y uniforme), con una altura *h* constante sobre la corteza. Estudiamos una pequeña región, de manera que podemos suponer que tanto la corteza terrestre como Σ son planas. Debido a la gravedad adicional que crea la masa *m*, la superficie real del mar será Σ' (no dibujada en la figura). Utilizamos un sistema de coordenadas con origen en la masa *m*.





En cada punto (x,h) a lo largo de Σ actúa la gravedad $\vec{g}_0$, de valor constante y dirigida verticalmente, más la gravedad adicional $\vec{g}_m$ producida por la masa puntual *m*.

g) Obtenga la expresión del campo gravitatorio total $\vec{g}(x,h)$ sobre la superficie Σ (en función de *x*, *h*, *m*, g_0 y de la constante *G* de gravitación universal).

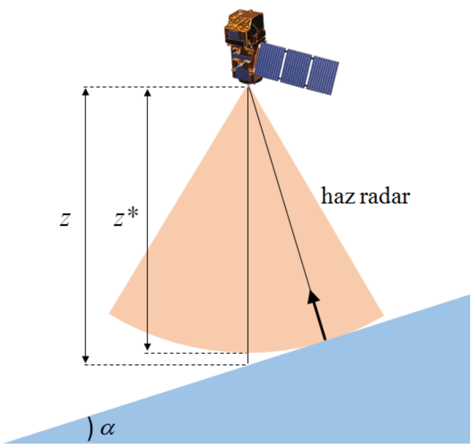
h) Haga un dibujo de la forma aproximada que tendría la nueva superficie del mar Σ', teniendo en cuenta cómo varía la dirección del vector $\vec{g}$.

La diferencia $\Delta h = h' - h$ entre la altura h' de la superficie real Σ' y la altura h de la superficie ideal Σ puede obtenerse mediante la llamada *fórmula de Bruns*: $\Delta h = V_P / g_0$, donde V_P es el potencial perturbador, que en nuestro caso es el potencial gravitatorio que crea la masa puntual *m*.

i) Determine $V_P(r)$ y expréselo en función de *x* como $V_P(x,h)$ a lo largo de Σ. Obtenga después $\Delta h(x,h)$. Calcule la máxima perturbación de la superficie del mar, $\Delta h(0,h)$, que crea una montaña de Zelandia, supuesta puntual, de masa $m = 1{,}5 \cdot 10^{14}$ kg sumergida a 2 km de profundidad.

El satélite Sentinel, que orbita a 700 km de altura, utiliza un radar para medir el nivel del mar mediante el eco de un haz esférico de microondas. La verdadera distancia al mar es *z*, pero el satélite mide *z** debido a la pendiente de la superficie del agua, que forma un ángulo α con la horizontal.

j) Determine (en función de *z* y α) el error Δz que comete el satélite. Calcule su valor cuando el satélite está midiendo el nivel del mar en un punto a distancia $x = 1$ km de la vertical que pasa por la montaña del apartado anterior.



[1] En realidad sería un elipsoide debido a la rotación de la Tierra, pero no consideramos ese efecto en este problema.

SOLUCIÓN

a) Por el principio de Arquímedes, la tensión de la cuerda será igual al peso aparente del escandallo, es decir, al peso menos el empuje:

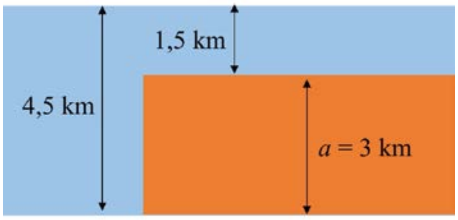
$$T = m_e g - m_a g = \rho_e V g - \rho_a V g = \rho_e V g \left(1 - \rho_a / \rho_e\right) = P_e \left(1 - 1/11\right) = 0{,}91 P_e$$

donde P_e es el peso del escandallo.

b) El sonido recorre dos veces la profundidad h_m en un tiempo $t = 2{,}4$ s . Por tanto:

$$2h_m = vt \quad \rightarrow \quad h_m = \frac{vt}{2} = \frac{1500 \cdot 2{,}4}{2} = 1800 \text{ m}$$

c) La profundidad media del fondo es de 4,5 km. La profundidad media de la superficie de Zelandia es de 1,5 km. Por tanto, se eleva una altura a = 3 km sobre el fondo. Como su superficie es S = 4,9 millones de km^2, podemos calcular su masa aproximada:



$$M_Z = \rho V = \rho S a = 3000 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{12} \cdot 3000 = 4{,}4 \cdot 10^{19} \text{ kg}$$

d) La densidad superficial de masa de Zelandia, considerada como un disco, es

$$\sigma = M_Z / S = \rho a = 3000 \cdot 3000 = 9 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^2$$

El barco está a una distancia de Zelandia mucho menor que la superficie de Zelandia, por eso podemos utilizar la expresión de la gravedad que crea un plano infinito:

$$g_Z = 2\pi G \sigma = 2\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 9 \cdot 10^6 = 0{,}00377 \text{ m/s}^2$$

(En realidad, no importa el valor numérico de la distancia entre el barco y Zelandia, ya que el campo gravitatorio que crea un plano infinito en un punto no depende de la de la distancia al punto).

e) El período del péndulo con la gravedad estándar vale

$$T_0 = 2\pi \sqrt{L / g_0} = 2\pi \sqrt{1 / 9{,}80665} = 2{,}00641 \text{ s}$$

La gravedad total en el barco (la estándar más la que crea Zelandia) es

$$g = g_0 + g_Z = 9{,}80665 + 0{,}00377 = 9{,}81042 \text{ m/s}^2$$

Entonces, el período del péndulo en el barco resulta $T = 2{,}00602$ s , y la diferencia entre los dos períodos:

$$\Delta T = 0{,}00039 \text{ s} = 0{,}4 \text{ ms}$$

NOTA: Puede calcularse tomando diferenciales, ya que el valor de g_Z es muy pequeño:

$$2\,dT / T = dg / g \quad \rightarrow \quad \Delta T = (g_Z / 2g_0) T_0$$

f) La superficie del mar es una superficie equipotencial. El potencial gravitatorio que crea la Tierra (perfectamente esférica y uniforme), de masa M y radio R, en un punto a distancia r del centro es

$$\text{g}(r) = \frac{GM}{r^2} \quad \rightarrow \quad V(r) = -\int \text{g}(r) dr = \frac{GM}{r}, \text{ con } V(\infty) = 0$$

Consideramos un punto de la superficie del mar a una altura h sobre la corteza terrestre, donde el potencial es $V(h) = GM / h$. Como el potencial es constante en toda la superficie del mar:

$$\frac{GM}{h} = cte \quad \rightarrow \quad h = cte$$, lo que ocurre en una superficie esférica de radio $r = R + h$

g) En todos los puntos de Σ actúa $\vec{g}_0 = -g_0 \vec{j}$. Además, la masa m crea una gravedad adicional

$$\vec{g}_m = -g_m \operatorname{sen}\theta \, \vec{i} - g_m \cos\theta \, \vec{j}$$

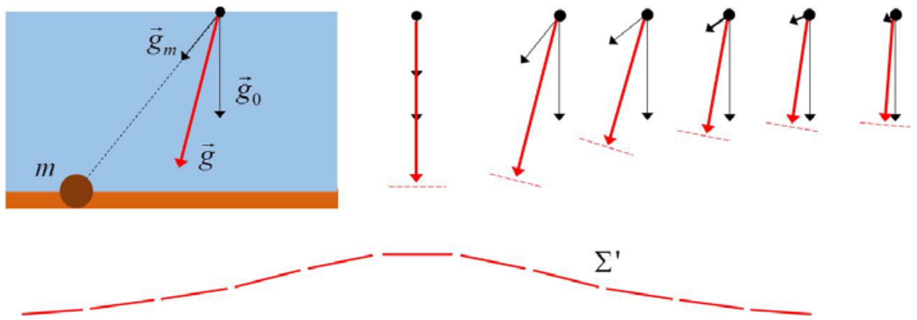
donde θ es el ángulo que forma el radio vector con la vertical ($\cos\theta = h/r$, $\operatorname{sen}\theta = x/r$), y $g_m = Gm/r^2$ es la gravedad que crea la masa puntual, con $r^2 = h^2 + x^2$. Así:

$$\vec{g}_m = -\frac{Gm}{(h^2+x^2)^{3/2}}\left(x\,\vec{i} + h\,\vec{j}\right)$$

Y el campo gravitatorio total sobre la superficie Σ es

$$\vec{g}(x,h) = -\frac{Gmx}{(h^2+x^2)^{3/2}}\vec{i} - \left(g_0 + \frac{Gmh}{(h^2+x^2)^{3/2}}\right)\vec{j}$$

h) La superficie del mar, al ser equipotencial, es perpendicular en cada punto al vector gravedad. La componente g_0 es constante, pero g_m decrece con x y su dirección se hace más horizontal. La dirección del vector $\vec{g}$ va variando a lo largo de Σ según muestra el dibujo. La nueva superficie del mar Σ' debe tener, por tanto, la curvatura mostrada.



i) El potencial perturbador es el que crea la masa m puntual, es decir,

$$V_p(r) = \frac{Gm}{r} \quad\rightarrow\quad V_p(x,h) = \frac{Gm}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

Utilizando la fórmula de Bruns ($\Delta h = V_P / g_0$), la diferencia de alturas entre Σ' y Σ es

$$\Delta h(x,h) = \frac{Gm}{g_0}\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

La máxima perturbación para la montaña ($m = 1{,}5\cdot 10^{14}$ kg sumergida a 2 km), resulta

$$\Delta h(0,h) = \frac{Gm}{g_0 h} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}5\cdot 10^{14}}{9{,}8\cdot 2000} = 0{,}51 \text{ m} = 51 \text{ cm}$$

j) De la construcción de la figura vemos que $\cos\alpha = z^*/z$. Entonces:

$$z = z^* + \Delta z = \frac{z^*}{\cos\alpha} \quad\rightarrow\quad \Delta z = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}z^* = (1-\cos\alpha)\,z$$

Podemos saber el ángulo que forma la superficie del mar respecto a la horizontal ya que $\tan\alpha = dy/dx$, donde $y = \Delta h(x,h)$ del apartado i). Entonces:

$$\tan\alpha = \frac{-Gm}{g_0}\frac{x}{(h^2+x^2)^{3/2}}$$

Para un punto a $x = 1$ km de la vertical que pasa por la montaña del apartado anterior, el ángulo resulta

$$\tan\alpha = \frac{-Gm}{g_0}\frac{x}{(h^2+x^2)^{3/2}} = \frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}5\cdot 10^{14}}{9{,}8}\frac{1\cdot 10^3}{\left((2^2+1^2)\cdot 10^3\right)^{3/2}} \quad\rightarrow\quad \alpha = -0{,}00009 \text{ rad}$$

Por tanto, el error que comete el satélite al medir el nivel del mar es

$$\Delta z = (1-\cos\alpha)\cdot 700\cdot 10^3 = 2{,}8\cdot 10^{-3} \text{ m} = 2{,}8 \text{ mm}$$