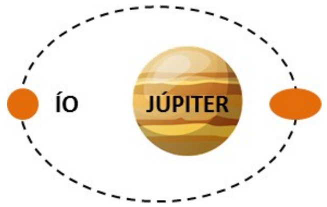
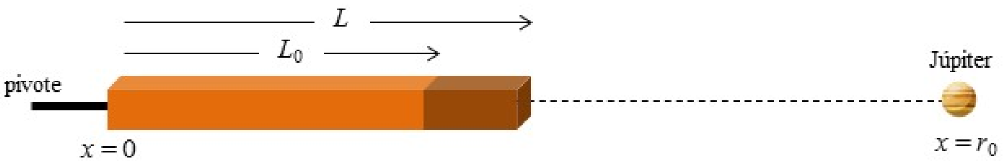
P2. Calentamiento de marea de Ío

El *calentamiento de marea* es un mecanismo complejo en el que las fuerzas de marea provocan el calentamiento de cuerpos que orbitan alrededor de otros. Recordemos que la *fuerza de marea* es la diferencia entre la fuerza gravitatoria sobre el extremo del cuerpo más cercano y el más alejado. Debido a la fuerza de marea, un cuerpo inicialmente esférico adquiere forma elipsoidal y el estiramiento calienta el cuerpo debido a la fricción interna. Este efecto es importante en cuerpos que orbitan alrededor de otros muy masivos en órbitas pequeñas y excéntricas, como ocurre con Ío, una de las lunas de Júpiter. La fuerza de marea en Ío experimenta grandes cambios a lo largo de su órbita, alcanzando un valor máximo cuando pasa por el periastro (punto más cercano a Júpiter) y un mínimo en el apoastro (punto más alejado), lo que produce un proceso cíclico de contracción y alargamiento de Ío que genera intensas fricciones. Se estima que en el transcurso de una órbita la corteza de Ío sufre variaciones de hasta 100 m de altura. La acumulación de calor en el interior de Ío hace que esté parcialmente fundido y que presente gran actividad volcánica. Además, su superficie apenas tiene cráteres de impacto debido a las continuas deformaciones.



Aquí proponemos unos modelos simplificados para estudiar el calentamiento de marea de Ío.

Barra elástica fija. Nuestro primer modelo para Ío consiste en una barra recta de longitud L_0 alineada con las líneas del campo gravitatorio de Júpiter, el cual produce una tensión en la barra que la estira hasta una longitud L. Para simplificar el problema, consideramos que la barra está quieta (no nos preocupamos, por ahora, del movimiento orbital). El extremo izquierdo de la barra, situado en $x = 0$, está fijado a un pivote que impide que se mueva (como si estuviese colgada). Júpiter se encuentra a la derecha con centro en $x = r_0$.



La barra tiene masa *m*, densidad uniforme ρ, sección constante *S*, capacidad calorífica específica C_e y coeficiente de dilatación lineal α. Júpiter tiene masa *M*.

Suponemos que el comportamiento de la barra es totalmente elástico. Cumple, por tanto, la ley de Hooke generalizada para sólidos elásticos:

$$\sigma = Y\varepsilon \tag{1}$$

donde $\sigma = F / S$ es la tensión (fuerza por unidad de área) que estira la barra, $\varepsilon = \Delta l / l$ es el alargamiento unitario producido, e Y es el llamado *módulo de Young* o constante de elasticidad de la barra.

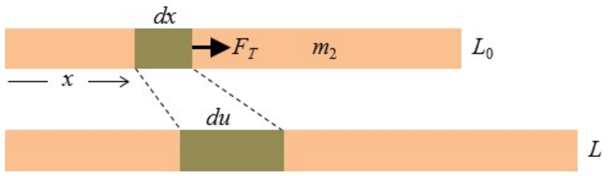
Empezamos estudiando la deformación que sufre la barra causada por su propio peso.

a) Calcule el peso de un trozo de barra comprendido entre los puntos x_1 y x_2. Calcule después el peso total de la barra. Ayuda: considere la fuerza gravitatoria dF_g que ejerce Júpiter sobre un elemento diferencial de masa *dm* situado a distancia *x* del origen, e integre.

En el caso de Ío se trataría de una barra muy cortita en comparación con la distancia a Júpiter: $L_0 \ll r_0$. Por tanto, en el resto del problema supondremos que $g \approx GM / r_0^2$, constante a lo largo de la barra.

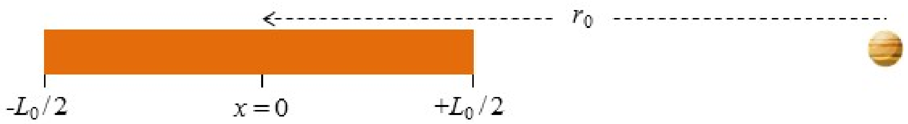
Un elemento diferencial de barra dm situado en x es estirado por una fuerza de tracción F_T igual al peso P_2 del trozo de barra a su derecha, comprendido entre x y L_0, de masa m_2.

b) Calcule la deformación $\Delta L = L - L_0$ de la barra. Ayuda: obtenga con la ecuación (1) el alargamiento unitario $\varepsilon(x)$ y tenga en cuenta que cada elemento dx se alarga hasta una longitud $du = dx + \varepsilon dx$.



c) Calcule el calor que habría que comunicar a la barra para producir una dilatación térmica equivalente al alargamiento que crea a la fuerza gravitatoria. Ayuda: la dilatación lineal para un incremento de temperatura ΔT viene dada por la expresión $l = l_0\left(1 + \alpha\,\Delta T\right)$.

Barra elástica en órbita. Tenemos en cuenta ahora el movimiento orbital, sin el pivote. Situamos la barra con su centro en $x = 0$ a distancia r_0 de Júpiter. Suponemos que toda la barra gira a la misma velocidad angular ω que su centro de masas. Ahora el trozo de masa m_2 está comprendido entre x y $L_0/2$.

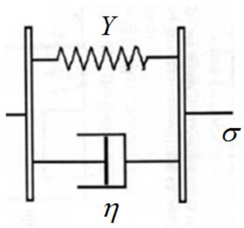


d) Escriba la expresión de la velocidad angular ω. ¿Cuánto vale el período orbital de Ío? Escriba la expresión de la fuerza centrípeta F_{c2} que actúa sobre el trozo de masa m_2 considerando que toda la masa m_2 está situada en el centro de masas del trozo.

e) Calcule de nuevo la deformación ΔL, cuando la barra orbita, teniendo en cuenta que, ahora, la fuerza de tracción sobre dm es $F_T = P_2 - F_{c2}$.

f) Si suponemos que Ío es una barra de longitud L_0 igual a su diámetro, calcule su variación de longitud del periastro al apoastro. (Use los datos numéricos del final del enunciado).

Barra viscoelástica en órbita. En realidad, un cuerpo perfectamente elástico recupera inmediatamente su forma cuando cesa la fuerza y, por tanto, el trabajo total en el ciclo de deformación es nulo. Sin embargo, los cuerpos llamados *viscoelásticos* presentan un comportamiento mixto parcialmente elástico y viscoso. Debido a la viscosidad, parte de la energía elástica no se recupera y se disipa en forma de calor por la fricción entre las moléculas. Vamos a utilizar para Ío un modelo de cuerpo viscoelástico, llamado *modelo de Kelvin*, formado por un resorte elástico actuando en paralelo con un amortiguador. La tensión en el resorte es $\sigma_Y = Y\varepsilon_Y$. La tensión en un amortiguador depende de la velocidad de deformación según la expresión $\sigma_\eta = \eta\; d\varepsilon_\eta / dt$, donde η es la viscosidad.



g) Demuestre que la tensión en el cuerpo viscoelástico sigue la ecuación constitutiva

$$\sigma = Y\varepsilon + \eta\frac{d\varepsilon}{dt} \qquad (2)$$

Ío experimenta una variación de la tensión de forma periódica, de valor máximo en el periastro y valor mínimo en el apoastro, que podemos escribir como $\sigma(t) = \sigma_0 \sin\omega t$. En el caso de Ío, para el que se cumple $\eta\,\omega \gg Y$, el término elástico de la ecuación (2) es muy pequeño y puede despreciarse.

h) Calcule el trabajo a lo largo de una órbita y la potencia disipada.

i) Con los datos numéricos, calcule el valor de la potencia disipada. Ayuda: calcule la amplitud σ_0 con la expresión de una fuerza efectiva que produzca la deformación obtenida en el apartado e), y evalúe dicha fuerza en el periastro y el apoastro. (Tome, de nuevo, L_0 igual al diámetro de Ío.)

Datos: Masa de Júpiter: $M = 1{,}9\cdot 10^{27}$ kg, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ $\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$

Datos de Ío: $m = 8{,}9\cdot 10^{22}$ kg, diámetro = 3643 km, $\rho = 3550\ \mathrm{kg/m^3}$, $Y = 10^{10}$ Pa, $\eta = 5\cdot 10^{15}$ Pa·s, radio orbital del periastro y del apoastro: $r_{peri} = 420000$ km y $r_{apo} = 423400$ km

SOLUCIÓN

a) La masa de un trozo de barra de espesor dx es $dm = \rho S\,dx$. La fuerza gravitatoria que hace Júpiter sobre ese elemento es

$$dF_g = \frac{GM}{\left(r_0 - x\right)^2}dm = \frac{GM\rho S}{\left(r_0 - x\right)^2}dx$$

El peso del trozo de barra entre x_1 y x_2 se obtiene al integrar la expresión anterior:

$$F_g\left(x_1, x_2\right) = GM\rho S\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left(r_0 - x\right)^2} = \boxed{GM\rho S\left(\frac{1}{r_0 - x_2} - \frac{1}{r_0 - x_1}\right)}$$

El peso total de la barra es

$$P_{barra} = F_g\left(0, L_0\right) = \frac{GM\rho S L_0}{r_0(r_0 - L_0)} = \boxed{\frac{GMm}{r_0(r_0 - L_0)}}$$

(Si $L_0 \ll r_0$, el peso es $P = mg$ con $g \approx GM / r_0^2$).

b) Como la densidad es constante, el trozo de barra que queda a la derecha de *dx*, entre x y L_0, tiene masa

$$m_2(x) = \frac{L_0 - x}{L_0}m$$

La fuerza de tracción sobre el elemento dx es igual al peso de la masa m_2, es decir, $F_T(x) = m_2(x)g$. Como la tensión es $\sigma = F_T / S$, con la ecuación (1) de la ley de Hooke, el alargamiento unitario es

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{Y} = \frac{mg}{SY}\frac{L_0 - x}{L_0}$$

La longitud final de la barra es la suma de todos los trozos *du*:

$$L = \int_{u(0)}^{u(L_0)}du = \int_0^{L_0}(dx + \varepsilon\,dx) = L_0 + \int_0^{L_0}\varepsilon\,dx$$

Teniendo en cuenta el alargamiento unitario $\varepsilon(x)$, se obtiene la deformación total:

$$\Delta L = \frac{mg}{SYL_0}\int_0^{L_0}(L_0 - x)dx = \frac{mg}{SYL_0}\frac{L_0^2}{2} = \frac{\rho g L_0^2}{2Y} = \boxed{\frac{GM\rho}{2Y}\frac{L_0^2}{r_0^2}}$$

NOTA: Este resultado aparece en los libros de texto como la elongación de una barra causada por su propio peso. En general, si no se cumple $L_0 \ll r_0$, la expresión que se obtiene para la deformación es

$$\Delta L = \frac{GM\rho}{Y}\left(\frac{L_0}{r_0 - L_0} + \ln\left(1 - \frac{L_0}{r_0}\right)\right)$$

c) La longitud de la barra deformada por la fuerza gravitatoria es $L = L_0 + \Delta L$. La longitud de la barra tras una dilatación térmica es $L = L_0 + L_0\alpha\Delta T$. Comparando ambas expresiones se obtiene el incremento de temperatura necesario para dicha dilatación:

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L_0}$$

Por otro lado, sabemos que el calor necesario para aumentar en ΔT la temperatura de un cuerpo es $Q = mC_e\Delta T$. Así, obtenemos la cantidad de calor que debería recibir la barra para producir una dilatación lineal equivalente al estiramiento elástico:

$$Q = mC_e\frac{\Delta L}{\alpha L_0} \quad \rightarrow \quad Q = \boxed{\frac{GMm}{r_0^2}\frac{\rho C_e L_0}{2Y\alpha}}$$

d) Aplicando la 3ª ley de Kepler, sabemos la velocidad angular de Ío:

$$\omega^2 = GM / r_0^3 = g / r_0 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}} = \sqrt{\frac{g}{r_0}}$$

El período orbital de Ío, utilizando los datos numéricos del enunciado, es $T =$ 1 día 18 h 27 min

La fuerza centrípeta sobre una masa m que gira con velocidad angular ω a una distancia r, es igual a $m\omega^2 r$. El centro de masas del trozo m_2 está situado en $(L_0/2 + x)/2$. Por tanto, su radio orbital (alrededor de Júpiter) es $r = r_0 - (L_0/2 + x)/2$. Así, la fuerza centrípeta sobre m_2 vale

$$F_{c2}(x) = m_2 \omega^2 \left(r_0 - \frac{L_0/2 + x}{2} \right)$$

e) La fuerza de tracción sobre el elemento dx es ahora el peso de m_2 menos la fuerza centrípeta:

$$F_T(x) = m_2 g - m_2 \omega^2 \left(r_0 - \frac{L_0/2 + x}{2} \right) = m_2 g - m_2 \frac{g}{r_0} \left(r_0 - \frac{L_0/2 + x}{2} \right) = \frac{m_2 g}{2r_0} \left(\frac{L_0}{2} + x \right)$$

Por otro lado, como ahora el extremo derecho de la barra está en $L_0/2$, la masa m_2 vale

$$m_2(x) = \frac{L_0/2 - x}{L_0} m$$

Por tanto, la fuerza de tracción sobre dm queda:

$$F_T(x) = \frac{mg}{2r_0 L_0} \left(\frac{L_0}{2} + x \right) \left(\frac{L_0}{2} - x \right) = \frac{GMm}{2r_0^3 L_0} \left(\frac{L_0^2}{4} - x^2 \right)$$

(Vemos que esta fuerza es nula en los dos extremos de la barra, y es máxima en el centro).

A partir de $\varepsilon(x)$ se obtiene la deformación total integrando, en este caso, entre $-L_0/2$ y $L_0/2$:

$$\Delta L = \frac{1}{SY} \frac{GMm}{2r_0^3 L_0} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} (L_0^2/4 - x^2)\, dx = \frac{1}{Y} \frac{GM\rho}{2r_0^3} \left(\frac{L_0^3}{6} \right) = \frac{GM\rho}{12Y} \frac{L_0^3}{r_0^3}$$

NOTA: Al considerar el movimiento orbital, la fuerza ya no escala con $(L_0/r_0)^2$, como se ha obtenido para la barra fija, sino con $(L_0/r_0)^3$ como corresponde a las fuerzas de marea.

NOTA: Al mismo resultado para la fuerza F_T se llega considerando el peso dP y la fuerza centrípeta dF_c sobre un elemento diferencial de masa dm situado en x, de forma que $dF_T = dF_c - dP$. Tras integrar e imponer la condición $F_T(\pm L_0/2) = 0$ para obtener la constante de integración, resulta $F_T(x)$.

NOTA: El problema también puede resolverse planteando la "fuerza de marea", como la diferencia entre la atracción gravitatoria sobre dm en una posición a distancia x del centro y la atracción cuando está situada en el centro. Al integrar, se obtiene la fuerza de módulo

$$F_{marea}(x) = \frac{GMm}{r_0^3 L_0} x^2$$

que, en este caso, es nula en $x = 0$ y máxima en los extremos. Utilizando esta fuerza como la fuerza deformadora, se obtiene el mismo resultado para la deformación.

f) La variación de longitud del periastro al apoastro es

$$L_{peri} - L_{apo} = \Delta L_{peri} - \Delta L_{apo} = \frac{GM\rho}{12Y} L_0^3 \left(\frac{1}{r_{peri}^3} - \frac{1}{r_{apo}^3} \right)$$

La longitud de Ío, en el modelo de barra, es $L_0 = 3643$ km (su diámetro, según indica el enunciado). Con los datos numéricos para la masa de Júpiter, y la densidad y el módulo de Young de Ío, obtenemos

$L_{peri} - L_{apo} = \boxed{58{,}5\ \text{m}}$

El resultado está en buen acuerdo con las deformaciones reales observadas en la corteza de Ío a lo largo de su órbita.

g) La deformación es la misma en los dos componentes: $\varepsilon = \varepsilon_Y = \varepsilon_\eta$. La tensión total es la suma de las tensiones en cada componente: $\sigma = \sigma_Y + \sigma_\eta$. Por tanto:

$$\boxed{\sigma = Y\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}}$$

h) El trabajo a lo largo de una órbita es

$$W = \int_0^T F dx = S L_0 \int_0^T \sigma d\varepsilon = \frac{m}{\rho} \int_0^T \sigma d\varepsilon$$

Como $\sigma = \eta\, d\varepsilon / dt$, el trabajo queda:

$$W = \frac{m}{\eta\rho} \int_0^T \sigma^2 dt = \frac{m\sigma_0^{\ 2}}{\eta\rho} \int_0^T \sin^2 \omega t\ dt = \frac{m\sigma_0^{\ 2}}{\rho\eta} \frac{T}{2} = \boxed{\frac{\pi m \sigma_0^{\ 2}}{\rho\eta\omega}}$$

Este trabajo equivale al área del ciclo de histéresis a lo largo de la órbita. No es nulo, es la energía disipada en forma de calor.

La potencia es el trabajo por unidad de tiempo. Como el trabajo anterior corresponde a un tiempo *T*, la potencia disipada es

$$P = \boxed{\frac{m\sigma_0^{\ 2}}{2\rho\eta}}$$

i) La fuerza efectiva que produce la deformación de la barra que orbita, según el apartado e), es

$$F = \frac{SY}{L_0} \Delta L = \frac{SY}{L_0} \frac{GM\rho}{12Y} \frac{L_0^{\ 3}}{r_0^{\ 3}} = \frac{GMm}{12} \frac{L_0}{r_0^{\ 3}}$$

Evaluamos dicha fuerza en el apoastro y el periastro tomando como distancia a Júpiter r_{apo} y r_{peri}:

$F_{peri} = 4{,}623 \cdot 10^{19}\ \text{N}$

$F_{apo} = 4{,}513 \cdot 10^{19}\ \text{N}$

La amplitud de la variación de la tensión σ_0 se puede determinar como

$$\sigma_0 = \frac{(F_{peri} - F_{apo})/2}{S}$$

Teniendo en cuenta que $S = m / \rho L_0$, se obtiene $\sigma_0 = 8 \cdot 10^4\ \text{Pa}$. Así, el valor de la potencia resulta:

$$P = \frac{m\sigma_0^{\ 2}}{2\rho\eta} \boxed{= 1{,}6 \cdot 10^{13}\ \text{W}}$$

que está en buen acuerdo con la potencia radiante observada en Ío.

NOTA: Si tenemos en cuenta la excentricidad e de la órbita y que, en una órbita elíptica, se cumple $r_{peri} = (1-e) r_0$ y $r_{apo} = (1+e) r_0$, se pueden reescribir los resultados como:

$$\sigma_0 = \frac{\rho L_0^{\ 2} \omega^2 e}{4}$$

$$P = \frac{m\rho L_0^{\ 4} \omega^4 e^2}{32\eta}$$