

P3 Enfoque magnético

El *enfoque magnético* consiste en la focalización de un haz de electrones sobre un punto utilizando un campo magnético que hace las veces de “lente”. El enfoque magnético tiene muchas aplicaciones: se utiliza por ejemplo en los tubos de rayos catódicos, en los microscopios electrónicos, en los aceleradores de partículas y en instrumentos médicos de diagnóstico.

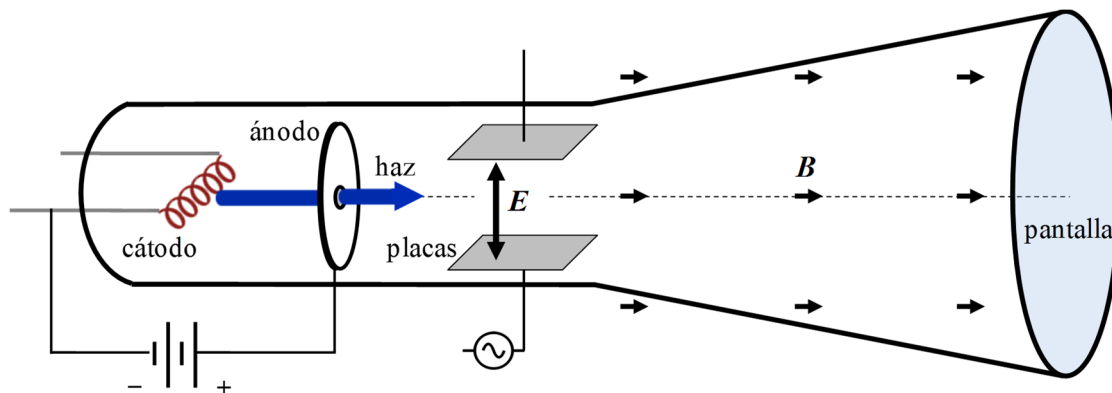


Figura 1. Cañón de electrones con sistema de enfoque magnético.

En este problema vamos a estudiar un *cañón de electrones* con sistema de enfoque magnético, que es un dispositivo que permite producir un haz de electrones y enfocar dicho haz en el centro de una pantalla fluorescente. El esquema del cañón, montado en un tubo, se muestra en la Figura 1. En primer lugar, los electrones emitidos por un filamento incandescente, que actúa como cátodo, son acelerados mediante una diferencia de potencial hasta el ánodo (un disco con un pequeño orificio) al que llegan con una determinada velocidad. A continuación, el haz de electrones atraviesa el espacio en medio de un par de placas deflectoras horizontales entre las que puede aplicarse un campo eléctrico uniforme, perpendicular al haz y de sentido alternante hacia arriba y hacia abajo: $E = E_0 \cos(2\pi ft)$, donde E_0 es su amplitud y f su frecuencia. Finalmente, el haz penetra en una región donde existe un campo magnético, B , uniforme y paralelo al eje del tubo, que actúa desde la salida de las placas hasta la pantalla, a lo largo de toda la trayectoria de los electrones. El sistema que produce el campo magnético (solenoides o imanes) no se muestra en la figura por simplicidad.

Consideremos primero que los campos eléctrico y magnético son nulos, y que el haz que sale del ánodo es un rayo perfecto constituido por una hilera de electrones (uno detrás de otro). En estas condiciones, los electrones golpearían la pantalla en un único punto C en su centro. Sin embargo, si aplicamos el campo eléctrico E alternante los electrones se desvían al atravesar las placas deflectoras. En la pantalla se observa entonces una mancha lineal vertical, cuya longitud depende del valor de la amplitud, E_0 , del campo eléctrico.

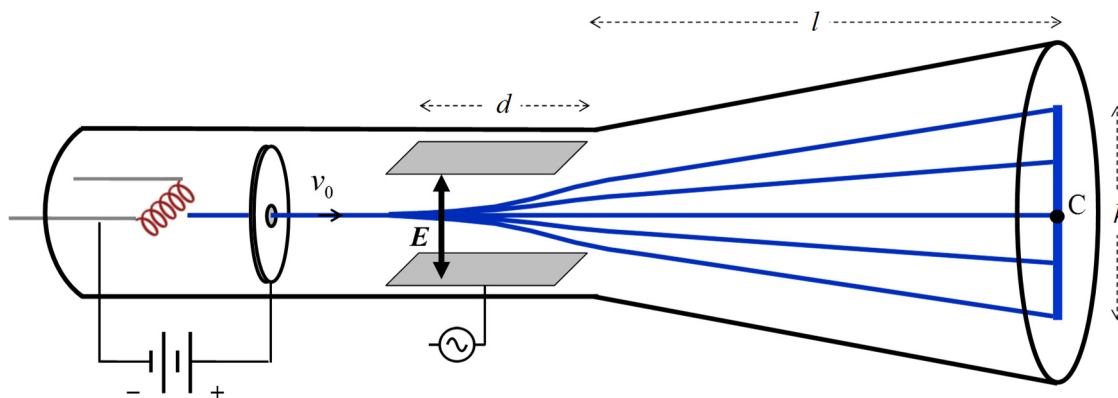


Figura 2. Acción de las placas deflectoras.

Supongamos que todos los electrones salen del ánodo a lo largo del eje del tubo con la misma velocidad v_0 . La longitud de las placas deflectoras es d y la distancia desde el extremo de las placas a la pantalla es l . Los electrones tienen carga $-e$ y masa m . Considere que durante el tiempo de travesía entre las placas deflectoras, el campo eléctrico E al que están sometidos los electrones es constante: $-E_0 < E < E_0$.

- a) Determine, en función de las variables del problema: la velocidad transversal, v_\perp , de los electrones tras atravesar el espacio entre las placas deflectoras; la inclinación, $\tan \theta$, de su trayectoria una vez que salen de las placas (donde θ es el ángulo respecto al eje del tubo); y la longitud, h , de la línea vertical trazada por los electrones al impactar en la pantalla debido al campo alternante.

Como habrá visto al responder la pregunta anterior, el haz de electrones que entra al espacio entre las placas por el eje no sale por un punto en el eje. A partir de ahora, por simplicidad, consideraremos (como en la Figura 3) que los electrones que salen de las placas deflectoras con velocidad $\vec{v}_0 + \vec{v}_\perp$, lo hacen por un punto P que está aproximadamente en el eje del tubo.

Suponga en adelante que también actúa el campo magnético longitudinal y uniforme B entre la salida de las placas y la pantalla. Este campo no afecta el movimiento longitudinal de los electrones, pero sí que afecta al movimiento transversal. Si sólo tuviesen la velocidad transversal v_\perp calculada en el apartado anterior, los electrones se moverían en trayectorias circulares en un plano perpendicular al eje del tubo. Sin embargo, como $v_0 \neq 0$, la combinación del movimiento de avance longitudinal con el movimiento circular en un plano transversal produce un movimiento helicoidal, como se muestra en la Figura 3.

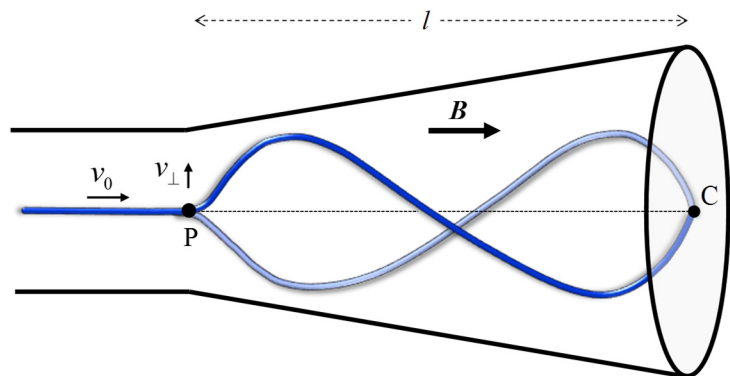


Figura 3. Trayectorias helicoidales al aplicar el campo magnético.

Recuérdese que, dependiendo del valor de E en cada instante de tiempo, entre E_0 y $-E_0$, los electrones salen por P formando diferentes ángulos θ , y con diferentes velocidades transversales v_\perp , por encima y por debajo del eje.

- b) Considere las trayectorias de los electrones que salen desde P hacia arriba del eje y las que salen hacia abajo. Justifique cuáles forman hélices a derecha y cuáles a izquierda.
- c) Sitúese detrás de la pantalla de forma que los electrones avancen hacia usted. Dibuje cómo se verían las trayectorias desde esa posición. Indique en el dibujo el centro de la pantalla C y muestre distintas trayectorias para dar cuenta de que E puede ser positivo o negativo y que además E y B pueden variar en módulo. Con la ayuda de flechitas, indique los posibles sentidos de giro: horario y/o antihorario.
- d) Demuestre que los electrones con mayor velocidad transversal viajan en círculos más grandes, y viceversa. Determine su radio R en función de las variables del problema, y muestre que es independiente de la masa y carga de los electrones.
- e) Determine el periodo de rotación, T . ¿Es el mismo para todas las posibles trayectorias?

Se varía ahora lentamente el campo magnético hasta conseguir que el tiempo requerido para que los electrones hagan una revolución completa sea igual al tiempo que emplean en llegar de las placas deflectoras a la pantalla. Entonces todos los electrones se enfocarán en el punto central independientemente del ángulo de divergencia θ que llevaban al inicio.

- f) ¿Cuál es el valor del campo magnético B_1 con el que se consigue este enfoque? ¿Qué campo B_n es necesario para que los electrones den n vueltas antes de llegar a la pantalla?

P3 Solución

- a) Debido al campo eléctrico en el interior de las placas, $E = E_0 \cos(2\pi ft)$, los electrones experimentan una fuerza eléctrica transversal: $F = -eE$, y por tanto adquieren una aceleración transversal

$$-eE = m a_{\perp} \rightarrow a_{\perp} = \frac{-eE}{m} \quad (1)$$

La velocidad transversal v_{\perp} con que los electrones abandonan las placas es $v_{\perp} = a_{\perp} t$, donde t es el tiempo empleado por los electrones en atravesar el espacio entre las placas. El movimiento transversal es independiente del movimiento a lo largo del eje del tubo; por tanto, el tiempo anterior será el empleado por los electrones, cuya velocidad longitudinal es v_0 , en recorrer la longitud d de las placas: $t = d / v_0$. Así, la velocidad transversal, utilizando (1), resulta

$$v_{\perp} = \frac{-eE}{m} t = \frac{-eEd}{mv_0} \quad (2)$$

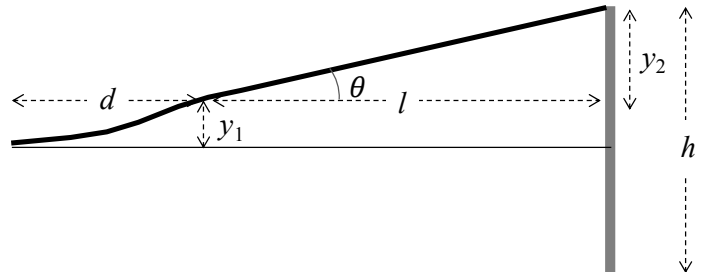
La inclinación de la trayectoria de salida de los electrones es

$$\tan \theta = \frac{v_{\perp}}{v_0} \rightarrow \tan \theta = \frac{-eEd}{mv_0^2} \quad (3)$$

El tratamiento propuesto en (1), (2) y (3) es válido para cualquier valor del campo eléctrico entre E_0 y $-E_0$ (siempre que el periodo de oscilación del campo E sea mucho mayor que el tiempo de tránsito entre las placas deflectoras y, por tanto, la aceleración se pueda considerar constante durante dicho tránsito).

La longitud h de la línea vertical trazada sobre la pantalla corresponde al desplazamiento máximo de los electrones en los dos sentidos, lo que ocurre cuando $E = \pm E_0$. Esta longitud puede calcularse como la suma de la distancia transversal recorrida por los electrones dentro de las placas, y_1 , más la recorrida fuera de las placas, y_2 :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{eE_0 d^2}{2mv_0^2} = \frac{d}{2} \tan \theta \\ y_2 = l \tan \theta \rightarrow y_2 = \frac{eE_0 d}{mv_0^2} l \end{cases}$$



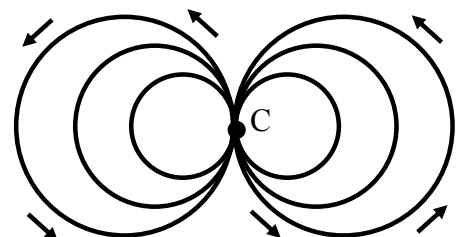
La trayectoria dibujada corresponde a $E = -E_0$.

Por tanto, longitud de la línea es

$$h = 2(y_1 + y_2) = (d + 2l) \tan \theta = \frac{eE_0 d}{mv_0^2} (d + 2l) \quad (4)$$

- b) Hay que tener en cuenta que la carga del electrón es negativa y el sentido del campo magnético es hacia la pantalla. Por la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B} = -e \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$, los electrones que salen hacia arriba forman una hélice a derechas (quedando el eje en la izquierda). Por el contrario, los que salen hacia abajo forman una hélice a izquierdas (quedando el eje a la derecha).

- c) Desde la pantalla veríamos venir a los electrones tal como se muestra en la figura. Cada circunferencia corresponde a un valor distinto de B o E . Las circunferencias de la izquierda son para E positivo (hacia arriba), y las de la derecha para E negativo (hacia abajo). Todos los giros son en sentido antihorario (levógiro) desde nuestra posición.



d) La fuerza de Lorentz, ahora tomada en módulo, actúa como fuerza centrípeta:

$$e v_{\perp} B = m \frac{v_{\perp}^2}{R} \quad (5)$$

que produce un movimiento circular (proyectado sobre un plano transversal) de radio

$$R = \frac{m v_{\perp}}{e B} = \frac{d |E|}{v_0 B} \quad (6)$$

donde se comprueba que los electrones con mayor velocidad transversal v_{\perp} viajan en círculos de radio mayor, y que dicho radio es independiente de la masa y carga de los electrones.

e) La frecuencia angular del movimiento helicoidal es

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{R} = \frac{2\pi}{T} \quad (7)$$

Utilizando (5) y despejando el período de (7):

$$\omega = \frac{e B}{m} \rightarrow T = 2\pi \frac{m}{e B} \quad (8)$$

donde comprobamos que, fijado el campo B , el período tiene el mismo valor para todas las trayectorias¹, independientemente del ángulo con que los electrones salen de las placas.

f) Para que se cumpla el enunciado, se tiene que verificar que $l = v_0 T$. Con el período obtenido en (8) concluimos que

$$l = v_0 2\pi \frac{m}{e B_1} \rightarrow B_1 = 2\pi \frac{m v_0}{e l} \quad (9)$$

que es independiente² del ángulo θ .

En el caso en que los electrones dan n vueltas: $l = n v_0 T$, de modo que

$$B_n = n B_1 \quad (10)$$

¹ Esta es también la ley básica de los ciclotrones.

² Razón del enfoque magnético: Como el haz de electrones no es un rayo lineal sino que en realidad tiene cierta sección, los electrones se repelen mutuamente, lo que haría que el haz se fuera ensanchando, es decir, que se convierta en un haz divergente. El enfoque magnético evita precisamente ese efecto.