# P3. Oscilador electromagnético

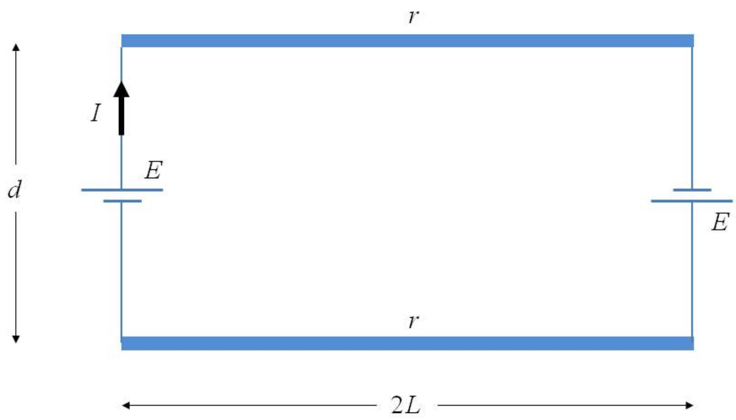


Fig. 1 Circuito de la cuestión a).

El circuito que se muestra en la figura contiene dos rieles metálicos paralelos separados por una distancia $d$, que están sujetos sobre una mesa horizontal no conductora. Cada riel tiene una longitud $2L$, una resistencia eléctrica total $r$ y su resistividad es uniforme a lo largo del riel. Sus extremos están conectados a las dos baterías ideales (sin resistencia interna) de la figura, de fuerza electromotriz $E$ cada una, mediante cables de resistencia despreciable.

a) **Determine la intensidad que circula por el circuito.**

Se coloca ahora encima de los rieles y perpendicularmente a ellos la barra metálica homogénea $\overline{HG}$ (de color rojo en la figura), de masa $m$ y resistencia $R$, de forma tal que puede deslizarse a lo largo de los rieles sin fricción. A continuación se estudiarán los circuitos $AHGD$ y $HCFG$[*] , y los nodos $H$ y $G$[**].

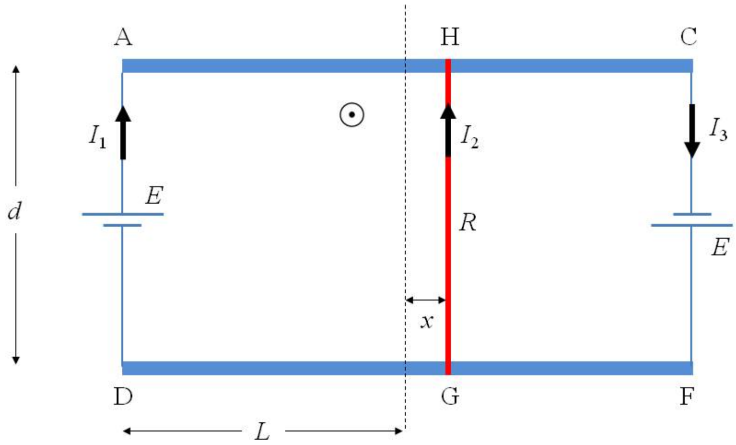


Fig. 2 Circuito con la barra deslizante.

b) **Demuestre que cuando la barra $\overline{HG}$ está en el centro, a una distancia $L$ de $\overline{AD}$, (es decir, con $x = 0$), se anula la intensidad $I_2$ que circula por ella.**

c) **Determine las resistencias $R_{AH}$ y $R_{DG}$ del circuito $AHGD$, así como las $R_{HC}$ y $R_{GF}$ del circuito $HCFG$, cuando la barra está desplazada una distancia $L+x$ de $\overline{AD}$.**

d) **Obtenga la intensidad $I_2$ en el caso en que la barra está desplazada una distancia $L+x$ de $\overline{AD}$.**

e) **Muestre que para $(x/L)^2$ despreciable la intensidad $I_2$ es proporcional al desplazamiento $x$, $\quad I_2 = cx$, y determine la constante $c$ en función de $E,\ r,\ R$ y $L$.**

---

[*] Ley de Kirchoff para los circuitos: *La suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico en un circuito cerrado es nula.*
Dicho de otro modo: *La suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada.*

[**] Ley de Kirchoff para los nodos: *La suma algebraica de las intensidades que pasan por un nodo es nula.* Dicho de otro modo: *La suma de las intensidades que entran en un nodo es igual a la suma de las que salen de él.*


Real Sociedad Española de Física R.S.E.F.
XXXV Olimpiada Española de Física Granada 4-7 de abril, 2024
Universidad de Granada

# P3. Oscilador electromagnético

Se aplica ahora un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano del circuito (dibujado como ejemplo en la Fig. 2 apuntando hacia fuera del papel).

f) **Indique el efecto del campo magnético $\vec{B}$ sobre la barra cuando éste, i) apunta hacia fuera del papel como en la figura, y ii) cuando apunta hacia dentro.**

g) **Obtenga la aceleración de la barra causada por el campo magnético y, en el caso en que se produzcan pequeñas oscilaciones, determine su periodo. Trabaje con la expresión genérica $I_2 = cx$ si no obtuvo el valor de $c$ en el apartado e).**

# P3. Oscilador electromagnético

## Solución

a) **Determine la intensidad que circula por el circuito.** (0.5 pts)

$$2\,E \;=\; 2\,I\,r \qquad \Rightarrow \qquad I \;=\; \frac{E}{r} \tag{1}$$

b) **Demuestre que cuando la barra $\overline{HG}$ está en el centro, a una distancia $L$ de $\overline{AD}$, (es decir, con $x = 0$), se anula la intensidad $I_2$ que circula por ella.** (1 pt)

En este caso, las resistencias $R_{AH} \;=\; R_{DG} \;=\; R_{HC} \;=\; R_{GF} \;=\; r/2$ y están en serie en cada circuito.
Circuito $AHGD$, $\quad E \;=\; I_1\,r \;-\; I_2\,R$
Circuito $HCFG$, $\quad E \;=\; I_3\,r \;+\; I_2\,R$
Nodos $H$ o $G$, $\quad I_1 \;+\; I_2 \;=\; I_3$

$$\text{Operando} \qquad I_1 = I_3 = I, \quad I_2 = 0$$

c) **Determine las resistencias $R_{AH}$ y $R_{DG}$ del circuito $AHGD$ así como las $R_{HC}$ y $R_{GF}$ del circuito $HCFG$ cuando la barra está desplazada una distancia $L+x$ de $\overline{AD}$.** (2 pts)

La resistencia de cada segmento de riel es proporcional a su longitud, correspondiendo $r$ a la longitud total $2L$ del riel; por tanto,

$$R_{AH} = R_{DG} = \frac{L+x}{2L}\,r \quad \text{y} \quad R_{HC} = R_{GF} = \frac{L-x}{2L}\,r$$

d). **Obtenga la intensidad $I_2$ en el caso en que la barra está desplazada una distancia $L+x$ de $\overline{AD}$.** (2.5 pt)

Aplicando la Ley de Kirchoff a los circuitos, se tiene:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Circuito} & AHGD & I_1\,(R_{AH} \;+\; R_{DG}) \;-\; I_2\,R \;=\; E \\ \text{Circuito} & HCFG & I_3\,(R_{HC} \;+\; R_{GF}) \;+\; I_2\,R \;=\; E \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2I_1\,R_{AH} \;-\; I_2\,R \;=\; E \\ 2I_3\,R_{HC} \;+\; I_2\,R \;=\; E \end{array}\right\}$$

Sustituyendo $I_2 \;=\; I_3 \;-\; I_1$ en la primera ecuación, queda

$$2\,I_3\,R_{AH} \;-\; I_2(R \;+\; 2\,R_{AH}) \;=\; E.$$

De la segunda se tiene que $2\,I_3 \;=\; (E \;-\; I_2\,R)/R_{HC}$, que sustituida en la anterior da:

$$\frac{E \;-\; I_2\,R}{R_{HC}}\,R_{AH} \;-\; I_2\,(R \;+\; 2R_{AH}) \;=\; E \quad \Rightarrow \quad I_2 \;=\; \frac{R_{AH} \;-\; R_{HC}}{R\,(R_{AH} \;+\; R_{HC}) \;+\; 2\,R_{AH}\;R_{HC}}\,E.$$

Sustituyendo los valores de las resistencias obtenidos en c)

$$R_{AH} \;-\; R_{HC} \;=\; \frac{x}{L}\,r, \quad R_{AH} \;+\; R_{HC} \;=\; r, \quad R_{AH}\;R_{HC} \;=\; \frac{L^2 - x^2}{4L^2}\,r^2,$$

queda,

$$I_2 \;=\; \frac{2EL}{(L^2 - x^2)\,r \;+\; 2\,L^2\,R}\,x.$$

e) **Muestre que para $(x/L)^2$ despreciable la intensidad $I_2$ es proporcional al desplazamiento $x$, $I_2 = cx$ y determine la constante $c$ en función de $E$, $r$, $R$ y $L$.** (0.5 pt)

En el caso en que $x^2$ se pueda despreciar frente a $L^2$, la expresión se reduce a:

$$I_2 = \frac{2E}{L\,(r + 2\,R)}\,x, \quad \text{de modo que la constante } c \text{ del enunciado vale} \quad c = \frac{2E}{L\,(r + 2\,R)}, \quad \text{que es positiva.}$$

f) **Indique el efecto del campo magnético $\vec{B}$ sobre la barra cuando éste i) apunta hacia fuera del papel como en la figura, y ii) cuando apunta hacia dentro.** (2 pts)

La fuerza de Lorentz que el campo $\vec{B}$ ejerce sobre una carga $q$ que se mueve a velocidad $\vec{v}$ es

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

En el caso de una corriente hay que tener en cuenta que la dirección y sentido de $\vec{v}$ los marca su intensidad, es decir que $\vec{v} \propto \vec{I}_2$. Sus cargas recorren la longitud de la barra $d$ en un tiempo $t$, tal que $v = d/t$ y en ese tiempo la carga total que se ha acumulado en el conductor es $q = I_2\,t$.

Resumiendo, se tiene que $q\,\vec{v} = d\,\vec{I}_2$ y por lo tanto el campo magnético ejerce una fuerza sobre la barra

$$\vec{F} = d\,\vec{I}_2 \times \vec{B}.$$

Dependiendo del sentido de los vectores $\vec{B}$ e $\vec{I}_2$ se podrían dar cuatro situaciones que se representan gráficamente a continuación


$\vec{B}$ hacia fuera $\qquad\qquad$ $\vec{B}$ hacia dentro

g) **Obtenga la aceleración de la barra causada por el campo magnético y, en el caso en que se produzcan pequeñas oscilaciones, determine su periodo. Trabaje con la expresión genérica $I_2 = c\,x$ si no obtuvo el valor de $C$ en el apartado e).** (1.5 pt)

Como $c$ es positivo, el sentido de $I_2$ es el indicado en las figuras primera por la izquierda y última por la derecha. De ellas, únicamente en el caso $\vec{B}$ hacia dentro la fuerza $\vec{F}$ se opone al desplazamiento $x$ (hacia la derecha en la Fig. 2) de la barra. En este caso,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d\,I_2\,B}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2\,B\,E}{m\,(r + 2\,R)}\left(\frac{d}{L}\right)x$$

Que corresponde a una frecuencia y periodo:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,B\,E}{m\,(r + 2\,R)}\left(\frac{d}{L}\right)} \quad \Rightarrow \quad T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m\,(r + 2\,R)}{2\;B\,E}\left(\frac{L}{d}\right)}.$$

Trabajando sólo con $I_2 = c\,x$ se llega a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d\,I_2\,B}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d\,c\,B}{m}\,x$$

Que, suponiendo $c$ positivo, corresponde a una frecuencia y periodo:

$$\omega = \sqrt{\frac{d\,c\,B}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{d\,c\,B}}.$$