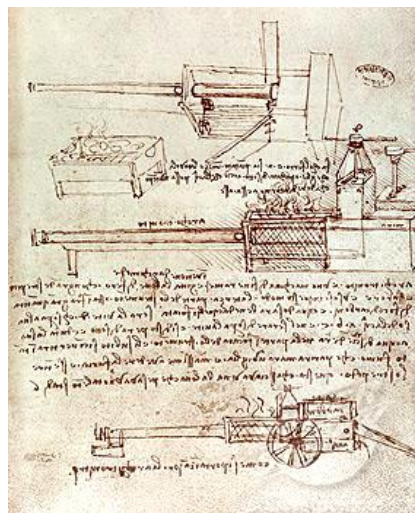


P1. El Architrón de Arquímedes

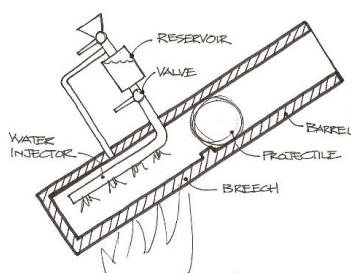
Arquímedes de Siracusa (Sicilia, actual Italia) fue un genio griego y uno de los mayores científicos de la Edad Antigua. Sus trabajos en matemáticas, física e ingeniería han tenido una gran influencia en la ciencia moderna. Algunos de sus inventos aún se usan, como, por ejemplo, el tornillo de Arquímedes o la garra de Arquímedes.



En este problema vamos a analizar uno de sus inventos: el cañón de Arquímedes o Architrón, un cañón de vapor de agua que se encuentra descrito en documentos de Leonardo da Vinci de finales del siglo XV. Leonardo describió el Architrón como “una máquina de cobre fino, una invención de Arquímedes, que

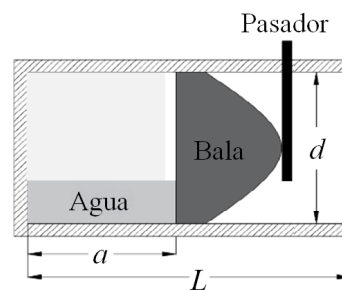


lanza bolas de hierro con gran ruido y violencia”. El cañón funciona



mediante un fuego que calienta la cámara del cañón. El agua se inserta en la cámara a través de una válvula e inmediatamente se convierte en vapor, proporcionando la presión necesaria para propulsar el proyectil.

En la figura se muestra una vista lateral de un modelo que, si bien no es exactamente igual al diseño original, reproduce en esencia los principios físicos de funcionamiento del Architrón. El dispositivo consiste en un tubo cilíndrico de hierro de diámetro interno $d = 20$ cm, longitud $L = 1$ m y masa $m_t = 20$ kg cerrado por su extremo izquierdo, y que supondremos anclado al suelo para evitar retrocesos en el proceso de lanzamiento. Se coloca dentro del tubo una bala de hierro de masa $m_b = 2$ kg, que encaja perfectamente y sin rozamiento con las paredes del tubo y que está inicialmente a distancia $a = 50$ cm de la base del tubo (la tapadera del extremo izquierdo), creando una cámara hermética en la que previamente se han introducido 100 ml de agua. El resto de la cámara contiene aire (en lo sucesivo, “aire” se referirá sólo a este aire seco que no incluye el vapor) y una cantidad inicialmente despreciable de vapor de agua. La temperatura inicial del cañón (tubo, bala, agua y aire) es $T_1 = 20$ °C y la presión inicial en la cámara es la atmosférica, $P_1 = 1$ atm. Se conecta al cañón una fuente de calor que le comunica una energía por unidad de tiempo $k = 5 \cdot 10^3$ J/s. Suponemos que todo el sistema se calienta de manera homogénea. Consideraremos en todo el problema que tanto el aire como el vapor de agua se comportan como gases ideales.



- a) Calcule el número de moles de agua y el número de moles de aire que hay inicialmente dentro del cañón. Calcule la densidad del aire.

Como la cámara del cañón es un recipiente cerrado, el agua se encuentra en equilibrio dinámico con su vapor, de manera que hay tantas moléculas de líquido que se evaporan como moléculas de gas que se condensan. Este equilibrio ocurre a una presión llamada “presión de vapor”, que es la presión que ejercen las moléculas de la fase gaseosa sobre la fase líquida a una temperatura dada. Conforme se calienta el agua más moléculas logran escapar del líquido, por lo que aumenta la concentración de vapor y, por tanto, aumenta la

presión de vapor. Un líquido empieza a hervir cuando la presión de vapor iguala la presión externa. Pero dentro del cañón el agua no puede hervir, porque la presión de vapor siempre es menor que la presión total (la del vapor más la del aire), y sólo hay evaporación. Sabemos que la presión de vapor del agua se relaciona con la temperatura por medio de la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$P = 101325 \cdot e^{\frac{L}{R} \left(\frac{1}{373.15} - \frac{1}{T} \right)},$$

donde P está expresada en Pa y T en K, la constante L es el calor latente de vaporización del agua y R es la constante de los gases ideales. (Se comprueba que a 100 °C la presión de vapor es 1 atm.)

Calentamos el sistema hasta $T_2 = 150$ °C .

- b) Calcule la presión de vapor, la presión del aire y la presión total dentro de la cámara a 150 °C. ¿Cuántos moles de agua quedan sin evaporar?

Seguimos calentando hasta una temperatura T_3 justo a la cual toda el agua líquida se ha evaporado y ya sólo hay vapor en la cámara del cañón.

- c) Compruebe que T_3 está entre 190 °C y 200 °C.

Calentamos aún más, ya con toda el agua en fase vapor, hasta alcanzar una temperatura $T_4 = 300$ °C .

- d) Calcule el calor total empleado para aumentar la temperatura de T_1 a T_4 . Escriba una lista ordenada con todos los procesos involucrados empezando por el que más calor ha necesitado y terminando por el que menos. ¿Cuánto tiempo ha estado encendida la fuente de calor? (Utilice un valor razonable para T_3 . Suponga que, aunque la evaporación es gradual, toda el agua permanece líquida hasta T_3 . Suponga también que el aire y el vapor sufren procesos a volumen constante.)

Al alcanzar la temperatura $T_4 = 300$ °C se quita el pasador del cañón y la bala comienza a moverse hacia la derecha. Como el proceso ocurre en poco tiempo, se puede considerar que el vapor de agua sufre un proceso adiabático (es decir, sin transferencia de calor entre el sistema y el exterior). Un gas ideal que sufre un proceso adiabático cumple $PV^\gamma = \text{cte}$, donde γ es el coeficiente adiabático del gas.

- e) Obtenga la expresión de la presión del vapor de agua cuando la base de la bala está a distancia x de la tapadera del cañón. Compruebe que en todo el trayecto de la bala por el interior del cañón es razonable suponer que la acción de la presión atmosférica es despreciable.
- f) Escriba la ecuación de movimiento de la bala en función de x . (Desprecie la acción de la presión del aire de la cámara y de la presión atmosférica sobre la bala.)
- g) Obtenga la expresión para la velocidad de la bala a lo largo del cañón. Ayuda: integre la ecuación diferencial anterior reescribiendo la aceleración como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

Tenga en cuenta que $\int x^{-\gamma} dx = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

- h) Calcule la velocidad que tiene la bala cuando sale por la boca del cañón.

Datos: densidad del agua $\rho_a = 1000$ kg/m³, masa molecular del agua $M_a = 0.018$ kg/mol, masa molecular del aire $M_{aire} = 0.029$ kg/mol, presión atmosférica 1 atm = 101325 Pa, temperatura del cero absoluto $T_0 = -273.15$ °C = 0 K, constante de los gases ideales $R = 8.31$ J/(mol·K), calor latente de vaporización del agua $L = 40 \cdot 10^3$ J/mol = $2.22 \cdot 10^6$ J/kg, calor específico del agua $c_a = 4180$ J/(kg·K), calor específico del hierro $c_{Fe} = 450$ J/(kg·K), calor específico a volumen constante del vapor $c_v = 1410$ J/(kg·K), calor específico a volumen constante del aire $c_{aire} = 720$ J/(kg·K), coeficiente adiabático del vapor $\gamma = 1.324$.

Solución

- a) Como hay 100 ml de agua su volumen será $V_a = 0.0001 \text{ m}^3$ y su masa será $m_a = 0.1 \text{ kg}$. El número de moles es la masa dividida por la masa molecular:

$$n_a = m_a / M_a = 0.1 / 0.018 = 5.56 \text{ moles}.$$

El volumen total de la cámara es $V_{total} = \pi(d/2)^2 a = 0.0157 \text{ m}^3$. El volumen que ocupa el aire es

$$V_{aire} = V_{total} - V_{agua} = 0.0157 - 0.0001 = 0.0156 \text{ m}^3,$$

que es prácticamente el volumen total. Para calcular el número de moles de aire utilizamos la ecuación de los gases ideales:

$$n_{aire} = \frac{P_1 V_{aire}}{R T_1} = \frac{101325 \cdot 0.0156}{8.31 \cdot (273.15 + 20)} = 0.65 \text{ moles}.$$

La densidad del aire es

$$\rho_{aire} = \frac{m_{aire}}{V_{aire}} = \frac{n_{aire} M_{aire}}{V_{aire}} = \frac{0.65 \cdot 0.029}{0.0156} = 1.2 \text{ kg/m}^3.$$

- b) La presión de vapor a $T_2 = 150^\circ\text{C}$ se calcula mediante la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$P_{v2} = 101325 \cdot e^{\frac{L}{R} \left(\frac{1}{373.15} - \frac{1}{T_2} \right)} = 101325 \cdot e^{\frac{40 \cdot 10^3}{8.31} \left(\frac{1}{373.15} - \frac{1}{423.15} \right)} = 4.59 \text{ atm}.$$

Aunque ya se ha evaporado algo de agua, ésta ocupa un volumen despreciable y podemos considerar que el volumen que ocupa el aire y el vapor es prácticamente el mismo que el inicial. La presión del aire es

$$P_{aire2} = \frac{n_{aire} R T_2}{V_{aire}} = \frac{0.65 \cdot 8.31 \cdot (273.15 + 150)}{0.0156} = 1.44 \text{ atm}.$$

La presión total dentro de la cámara será la suma de la presión del aire y la presión de vapor:

$$P_{total} = P_{aire2} + P_{v2} = 1.44 + 4.59 = 6.03 \text{ atm}.$$

El número de moles de vapor se calcula con la ecuación de los gases ideales:

$$n_{v2} = \frac{P_{v2} V_{aire}}{R T_2} = \frac{(101325 \cdot 4.59) \cdot 0.0156}{8.31 \cdot 423.15} = 2.06 \text{ moles}.$$

Por tanto, quedan $5.56 - 2.06 = 3.5$ moles de agua sin evaporar.

(Vemos que incluso a 150°C todavía quedan casi dos terceras partes de agua líquida.)

- c) Cuando se ha evaporado toda el agua, el número de moles de vapor es igual al número inicial de moles de agua calculado en el apartado a), es decir, $n_v = n_a = 5.56$. Y el vapor ocupará todo el volumen de la cámara, V_{total} . Según la ecuación de los gases ideales, la presión del vapor y la temperatura cumplirán

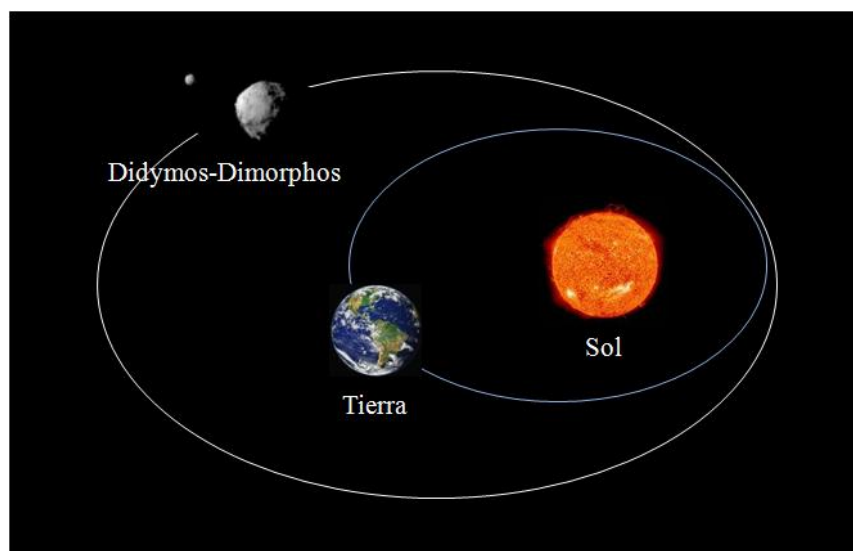
$$P_{v3} = \frac{n_v R T_3}{V_{total}} = \frac{5.56 \cdot 8.31}{0.0157} T_3 = 2943 T_3 \text{ Pa}.$$

Y también cumplirán la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$P_{v3} = 101325 \cdot e^{\frac{40 \cdot 10^3}{8.31} \left(\frac{1}{373.15} - \frac{1}{T_3} \right)} = 4.05 \cdot 10^{10} \cdot e^{-\frac{4813.5}{T_3}} \text{ Pa}.$$

P2. Defensa planetaria: la misión DART

Hay miles de grandes asteroides en el sistema solar en órbitas cercanas a la Tierra, y muchos de ellos son potencialmente peligrosos debido al riesgo de impacto en un tiempo futuro¹. Por ese motivo, se han desarrollado programas de seguimiento de estos objetos celestes mediante telescopios y se han planteado distintas estrategias para evitar la amenaza de colisiones. El primer ensayo de defensa planetaria contra asteroides ha sido la misión DART (*Double Asteroid Redirection Test*) de la NASA, que el 26 de septiembre del año pasado logró modificar la órbita del asteroide-luna Dimorphos. La misión DART utiliza el método del *impacto cinético*, que consiste en desviar con antelación la trayectoria de un asteroide, cuando todavía está muy lejos de la Tierra, haciendo chocar deliberadamente la propia nave espacial con el asteroide para cambiar su velocidad.



El objetivo de DART fue el sistema asteroidal Didymos-Dimorphos, perteneciente al grupo de asteroides Apolo que cruzan la órbita de la Tierra. Se trata de un sistema binario formado por un asteroide principal llamado Didymos, una gran roca de unos 780 m de diámetro y $5.55 \cdot 10^{11}$ kg de masa, alrededor del cual orbita Dimorphos, un asteroide pequeño y alargado de aproximadamente 150 m de diámetro equivalente y una masa de $0.05 \cdot 10^{11}$ kg. El sistema tiene una órbita alrededor del Sol muy excéntrica, con el perihelio (punto más cercano al Sol) situado a 1.01 UA y el afelio (punto más alejado del Sol) a 2.28 UA. En el momento del impacto con la nave DART, los asteroides estaban a unos 11 millones de km de la Tierra.

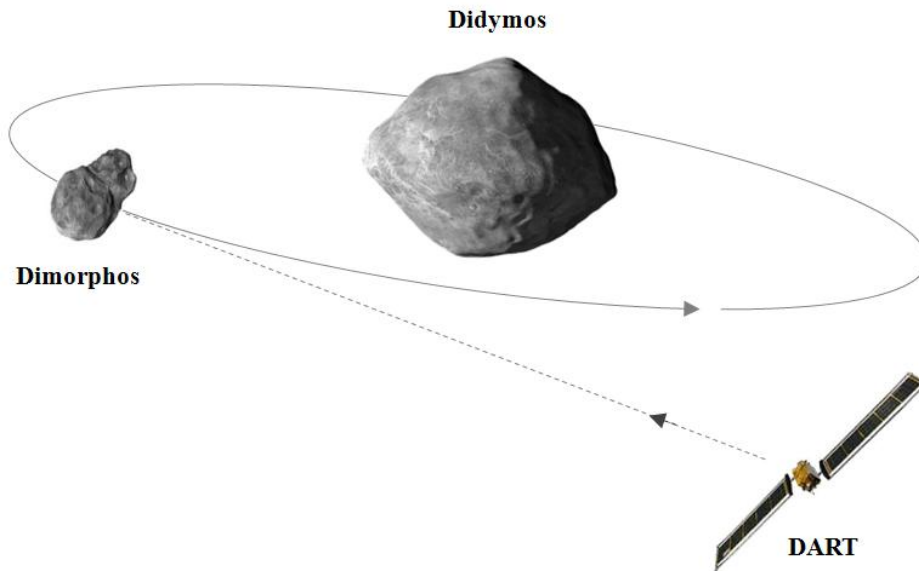
- a) ¿Cuántos años tarda el sistema Didymos-Dimorphos en completar una vuelta al Sol? (Realice los cálculos suponiendo que su órbita es circular tomando el radio orbital medio).

La órbita de Dimorphos alrededor de Didymos es prácticamente circular, y el radio orbital antes del impacto era de 1.2 km.

- b) Calcule el período orbital y la velocidad orbital de Dimorphos antes del impacto.

La nave DART, de 580 kg de masa, viajaba frontalmente contra Dimorphos a una velocidad de 6.2 km/s. Suponemos que la colisión entre DART y Dimorphos fue perfectamente inelástica y que se produjo sobre el centro de masas del asteroide.

¹ Se llaman “asteroides potencialmente peligrosos” a aquellos de tamaño mayor a 140 m, cuya distancia mínima de intersección con la órbita terrestre es una vigésima parte de la distancia entre la Tierra y el Sol. A esa distancia, se estima que la mayor perturbación orbital posible en un intervalo de 100 años podría resultar en una colisión, la cual produciría daños muy graves o catastróficos.



- c) Calcule la pérdida de velocidad, Δv , de Dimorphos esperada tras el impacto de DART. Exprese el resultado en mm/s.
- d) ¿Cuánto disminuiría el radio orbital de Dimorphos según el resultado anterior?
- e) ¿Cuál sería la nueva velocidad orbital de Dimorphos según el resultado anterior?
- f) ¿Cuánto se acortaría su período orbital según el resultado anterior? Demuestre que dicho acortamiento viene dado por la expresión $\Delta T / T_1 = 3 \Delta v / v_1$.

La misión DART fue todavía más exitosa de lo que se había proyectado. La NASA confirmó que, tras el choque, el período orbital de Dimorphos se había reducido en 33 minutos, un resultado mucho mayor al esperado según los cálculos anteriores. La explicación de esa discrepancia es que el impacto de la nave produjo un cráter en el asteroide con la consiguiente eyección de partículas, lo que amplificó el efecto de frenado. Se llama *eficiencia de la transferencia de momento*, β , al cociente entre el momento transferido al asteroide y el momento de la nave colisionadora. Se estima que tras el impacto se eyectaron partículas con una masa total de $5 \cdot 10^6$ kg. Suponemos que todas las partículas salieron en la misma dirección y en el mismo sentido del movimiento de Dimorphos, y que todas salieron con la misma velocidad.

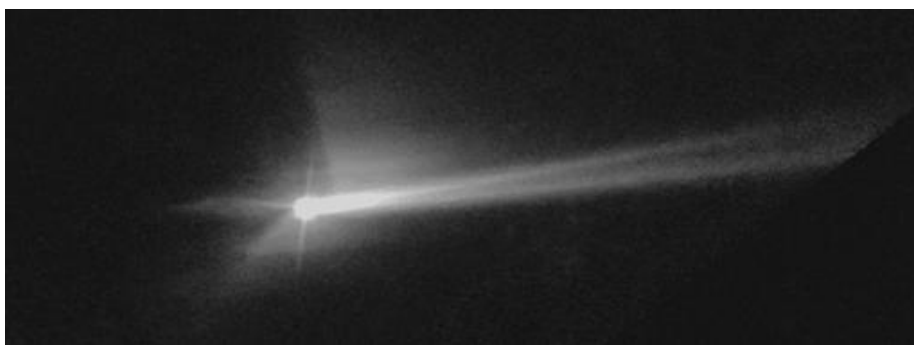


Foto de Dimorphos tomada por el Hubble que muestra la estela de masa eyectada tras el impacto

- g) Calcule la velocidad de la masa eyectada. Calcule el valor del factor β .
- h) Compare la velocidad del apartado anterior con las velocidades de escape de Dimorphos y de Didymos y explique qué esperamos que ocurra con las partículas eyectadas después de un tiempo suficientemente largo.

Datos: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, 1 UA (unidad astronómica) es igual a la distancia Tierra-Sol ($150 \cdot 10^6$ km).

Solución

- a) Se pregunta implícitamente por el período orbital del sistema Didymos-Dimorphos alrededor del Sol. Utilizamos la 3ª ley de Kepler:

$$T_{DD}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{Sol}} r_{DD}^3,$$

donde el radio orbital es el valor medio de las distancias al perihelio y al afelio:

$$r_{DD} = (1.01 + 2.28) / 2 = 1.645 \text{ UA}.$$

El enunciado no proporciona como dato la masa del Sol, pero sabemos que el período orbital de la Tierra es igual a 1 año y que orbita a 1 UA. Por tanto:

$$T_{DD} = r_{DD}^{3/2} T_T = (1.645)^{3/2} \cdot 1 = \mathbf{2.11 \text{ años}}.$$

- b) El período orbital de Dimorphos se obtiene igualmente utilizando la 3ª ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_D^3 = \frac{4\pi^2}{6.67 \cdot 5.55} (1200)^3 \rightarrow T = 42928 \text{ s} = \mathbf{11 \text{ h } 55 \text{ min}}.$$

donde la masa $M = 5.55 \cdot 10^{11} \text{ kg}$ es la de Didymos.

La velocidad orbital es

$$v_{orb} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 1200}{42928} = \mathbf{0.1756 \text{ m/s}}.$$

(También se puede calcular como $v_{orb} = \sqrt{GM/r} = \sqrt{6.67 \cdot 5.55 / 1200} = 0.1756 \text{ m/s}$.)

- c) En la colisión (perfectamente inelástica) de DART contra Dimorphos se conserva el momento lineal:

$$m v_1 - m_{dart} v_{dart} = (m + m_{dart}) v_2 \approx m v_2,$$

donde m es la masa de Dimorphos, $v_1 = v_{orb}$ la velocidad de Dimorphos antes del choque, m_{dart} la masa de la nave DART ($m_{dart} \ll m$), v_{dart} su velocidad antes del choque, y v_2 la velocidad del conjunto (que queda unido) tras el choque.

La pérdida de velocidad, $\Delta v = v_2 - v_1$, se despeja de la ecuación de conservación del momento:

$$m v_2 - m v_1 = -m_{dart} v_{dart} \rightarrow m \Delta v = -m_{dart} v_{dart} \rightarrow \Delta v = \frac{-580 \cdot 6200}{0.05 \cdot 10^{11}} = \mathbf{-0.7 \text{ mm/s}}.$$

(Es una pérdida de sólo el 0.4 %, pero suficiente para el propósito de estas misiones.)

- d) La velocidad del asteroide justo después del impacto es

$$v_2 = v_1 + \Delta v = 0.1756 - 0.0007 = 0.1749 \text{ m/s}.$$

Por tanto, debido a la colisión, Dimorphos pierde una energía cinética igual a

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{0.05 \cdot 10^{11}}{2} (0.1749^2 - 0.1756^2) = -613375 \text{ J}.$$

Al frenarse, Dimorphos cambia a una órbita de menor radio. Por el principio de conservación, la energía total en la nueva órbita debe ser igual a la energía en la órbita inicial más la energía perdida:

$$E_2^{orb} = E_1^{orb} + \Delta E = \frac{-GMm}{2r_1} + \Delta E = \frac{-6.67 \cdot 5.55 \cdot 0.05 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 1200} - 613375 = -77735250 \text{ J}.$$

Entonces, se puede calcular el nuevo radio orbital:

$$E_{orb2} = \frac{-GMm}{2r_2} \rightarrow r_2 = \frac{-6.67 \cdot 5.55 \cdot 0.05 \cdot 10^{11}}{2 \cdot (-77735250)} = 1190.5 \text{ m}.$$

Y, finalmente, la disminución del radio que pide el enunciado sería

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \mathbf{-9.5 \text{ m}}.$$

En lugar de hacer los cálculos paso a paso, se puede obtener una expresión teórica. La pérdida de energía en la colisión, la diferencia de energía total entre la órbita inicial y la órbita final y el

principio de conservación de la energía dan:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m (v_1^2 + 2v_1 \Delta v + \Delta v^2 - v_1^2) \approx m v_1 \Delta v .$$

$$E_{orb2} - E_{orb1} = \Delta E \rightarrow \frac{-GMm}{2r_2} - \frac{-GMm}{2r_1} = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx \frac{GMm}{2} \frac{\Delta r}{r_1^2} .$$

$$\frac{GMm}{2} \frac{\Delta r}{r_1^2} = \frac{m v_1^2}{2} \frac{\Delta r}{r_1} = m v_1 \Delta v \rightarrow \frac{\Delta r}{r_1} = 2 \frac{\Delta v}{v_1} .$$

(El resultado calculado con esta expresión es el mismo que antes: $\Delta r = -9.5$ m.)

- e) Como el nuevo radio orbital es $r_2 = 1190.5$ m, la nueva velocidad orbital sería

$$v_{orb2} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 5.55}{1190.5}} = 0.1763 \text{ m/s} .$$

Nótese que esta nueva velocidad orbital no es igual a la velocidad v_2 justo después del impacto, de hecho es mayor ($v_{orb2} > v_2$). Cuando Dimorphos se frena tras el impacto, es acelerado a una órbita de menor radio donde la velocidad orbital es mayor.

- f) En la nueva órbita, el período de Dimorphos pasaría a ser

$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_{orb2}} = \frac{2\pi \cdot 1190.5}{0.1763} = 42428 \text{ s} = 11 \text{ h } 47 \text{ min} ,$$

lo que supone un **acortamiento de 8 minutos**.

(También puede calcularse usando directamente la 3ª ley de Kepler con el nuevo radio r_2 .)

Para obtener la expresión que relaciona ΔT con la pérdida de velocidad tras el impacto Δv , derivamos en la 3ª ley de Kepler y usamos el resultado $\Delta r / r_1 = 2\Delta v / v_1$ del apartado d). Obtenemos:

$$2T dT = \frac{4\pi^2}{GM} 3r^2 dr \rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{3}{2} \frac{\Delta r}{r} = 3 \frac{\Delta v}{v} .$$

(Ésta es la expresión que aparece en algunos artículos científicos de la misión DART.)

- g) Si el acortamiento real del período orbital fue de 33 minutos es porque la pérdida de velocidad fue

$$\Delta v = \frac{\Delta T}{3T_1} v_1 = \frac{-33 \cdot 60}{3 \cdot 42928} \cdot 0.1756 = -2.7 \text{ mm/s} .$$

Planteamos de nuevo la conservación del momento lineal teniendo en cuenta la masa m_e eyectada:

$$m v_1 - m_{dart} v_{dart} = (m + m_{dart}) v_2 + m_e v_e \approx m v_2 + m_e v_e .$$

Por tanto, la velocidad de la masa eyectada es

$$v_e = \frac{-m \Delta v - m_{dart} v_{dart}}{m_e} = \frac{-0.05 \cdot 10^{11} \cdot (-2.7 \cdot 10^{-3}) - 580 \cdot 6200}{5 \cdot 10^6} = 2 \text{ m/s} .$$

El factor β (eficiencia de la transferencia de momento), por definición, es

$$\beta = \frac{m |\Delta v|}{m_{dart} v_{dart}} = \frac{0.05 \cdot 10^{11} \cdot 2.7 \cdot 10^{-3}}{580 \cdot 6200} = 3.75 .$$

(Debido a la masa eyectada, se produce una amplificación del momento transferido por la nave colisionadora. Así, el frenado es mucho más efectivo que el debido a un simple choque inelástico.)

- h) Las velocidades de escape son

$$\text{Dimorphos: } v_{esc} = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 0.05 / (150/2)} = 0.09 \text{ m/s} .$$

$$\text{Didymos: } v_{esc} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 5.55 / (780/2)} = 0.44 \text{ m/s} .$$

La velocidad de las partículas eyectadas es mayor que las velocidades de escape, por tanto, las partículas acabarán **escapando del sistema al espacio** y entrarán en alguna órbita alrededor del Sol.

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver por tanteo, probando diferentes temperaturas y comprobando si nos pasamos o nos quedamos cortos. En el intervalo que sugiere el enunciado:

Si $T_3 = 190^\circ\text{C}$, la primera ecuación da una presión de 13.5 atm y la segunda ecuación da 12.2 atm, menor que la anterior.

Si $T_3 = 200^\circ\text{C}$, la primera ecuación da una presión de 13.7 atm y la segunda ecuación da 15.3 atm, mayor que la anterior.

Por tanto, la temperatura T_3 está dentro de ese intervalo. Y un valor razonable es el valor medio: $T_3 = 195^\circ\text{C}$.

(También se pueden representar las dos curvas de presión, una lineal y la otra exponencial, y obtener de forma gráfica el punto donde se cortan. La resolución numérica del sistema de dos ecuaciones da como resultado exacto: $T_3 = 194.5^\circ\text{C}$ y $P_{v3} = 13.6$ atm.)

d) Los procesos involucrados son los siguientes:

Calentamiento de una masa de hierro $m_i + m_b = 22$ kg desde T_1 a T_4 :

$$Q_{Fe} = (m_i + m_b) c_{Fe} (T_4 - T_1) = 22 \cdot 450 \cdot (300 - 20) = 2772 \text{ kJ}.$$

Calentamiento de una masa de aire $m_{aire} = 0.65 \cdot 0.029 = 0.0189$ kg desde T_1 a T_4 :

$$Q_{aire} = m_{aire} c_{aire} (T_4 - T_1) = 0.0189 \cdot 720 \cdot (300 - 20) = 3.8 \text{ kJ}.$$

Calentamiento de una masa de agua $m_a = 0.1$ kg desde T_1 a T_3 (aunque la evaporación es gradual, como aproximación suponemos que toda el agua permanece líquida hasta T_3):

$$Q_{agua} = m_{agua} c_{agua} (T_3 - T_1) = 0.1 \cdot 4180 \cdot (195 - 20) = 73.2 \text{ kJ}.$$

Calentamiento de una masa de vapor $m_v = 0.1$ kg desde T_3 a T_4 :

$$Q_v = m_v c_v (T_4 - T_3) = 0.1 \cdot 1410 \cdot (300 - 195) = 14.8 \text{ kJ}.$$

Vaporización de una masa de agua $m_a = 0.1$ kg:

$$Q_L = m_a L = 0.1 \cdot 2.22 \cdot 10^6 = 222 \text{ kJ}.$$

El calor total necesario para llevar el sistema hasta T_4 es

$$Q = Q_{Fe} + Q_{aire} + Q_{agua} + Q_v + Q_L = 3086 \text{ kJ}.$$

La lista ordenada de los procesos según el gasto de calor es $Q_{Fe} > Q_L > Q_{agua} > Q_v > Q_{aire}$.

La fuente de calor ha estado encendida un tiempo

$$t = \frac{Q}{k} = \frac{3086}{5} = 10.3 \text{ min}.$$

(Se admite que los estudiantes utilicen para T_3 el valor medio del intervalo del apartado anterior, es decir, 195°C).

e) Aplicando de nuevo la ecuación de los gases ideales para $T_4 = 300^\circ\text{C}$ y V_{total} conocemos la presión del vapor justo antes de quitar el pasador:

$$P_{v4} = \frac{5.56 \cdot 8.31 \cdot 573.15}{0.0157} = 16.6 \text{ atm}.$$

Esta presión es mucho mayor que la atmosférica, por eso, cuando se suelte el pasador, la bala del cañón comenzará a acelerarse hacia la derecha.

Según el proceso de expansión adiabática, la presión cuando la bala está a distancia x será

$$P_v(x) = \left(\frac{V_{total}}{V(x)} \right)^\gamma P_{v4} = \left(\frac{a}{x} \right)^\gamma P_{v4} = 16.6 \cdot \left(\frac{0.5}{x} \right)^{1.324} = \frac{6.63}{x^{1.324}} \text{ atm} = \frac{6.7 \cdot 10^5}{x^{1.324}} \text{ Pa}.$$

Los valores de la presión del vapor de agua dentro del cañón en los extremos del recorrido de la bala ($x = a = 0.5 \text{ m}$ y $x = L = 1 \text{ m}$) son

$$P_v(a) = P_{v4} = 16.6 \text{ atm},$$

$$P_v(L) = 6.6 \text{ atm}.$$

Por tanto, en el recorrido de la bala, los valores de la presión del vapor son mucho mayores que la presión atmosférica.

Además, la presión atmosférica queda en buena medida contrarrestada por la presión del aire en el interior de la cámara, ya que dicha presión es $P_{aire4} = 0.65 \cdot 8.31 \cdot 573.15 / 0.0157 = 1.9 \text{ atm}$ justo antes del disparo, y en el extremo de salida del cañón (utilizando el mismo proceso de expansión adiabática que para el vapor) la presión del aire es 0.8 atm .

Por lo anterior, en los siguientes apartados es razonable despreciar la presión atmosférica y la presión del aire, y considerar sólo la acción de la presión de vapor $P_v(x)$ sobre la bala.

- f) La presión del vapor ejerce sobre la bala una fuerza

$$F(x) = P_v(x) \cdot \pi(d/2)^2 = \frac{2.1 \cdot 10^4}{x^{1.324}} \text{ N}.$$

A lo largo del eje horizontal la 2ª ley de Newton es

$$F(x) = m_b \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{2.1 \cdot 10^4}{x^{1.324}} = 2 \frac{d^2x}{dt^2}.$$

- g) La presión del vapor ejerce sobre la bala una fuerza

$$\frac{1.05 \cdot 10^4}{x^{1.324}} = \frac{d^2x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx} \rightarrow 1.05 \cdot 10^4 \frac{dx}{x^{1.324}} = v dv.$$

Como la bala parte del reposo: $v(a) = 0$. Resolviendo las integrales se tiene

$$1.05 \cdot 10^4 \cdot \int_a^x \frac{dx}{x^{1.324}} = \int_0^v v dv \rightarrow \frac{1.05 \cdot 10^4}{-0.324} \cdot \left[\frac{1}{x^{0.324}} \right]_{a=0.5}^x = \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^x.$$

Y, finalmente, la velocidad de la bala a lo largo del cañón es

$$v(x) = 100 \cdot \sqrt{8.1 - \frac{6.5}{x^{0.324}}} \text{ m/s}.$$

- h) La velocidad de la bala cuando sale por la boca del cañón es

$$v(L) = 126 \text{ m/s}.$$

P3. Medidas eléctricas. Solución

Determinación de la resistencia de una bobina

Considere la bobina circular de la figura de radio a , N vueltas y resistencia total R . Se la hace girar en el aire, alrededor de un eje vertical y con velocidad angular uniforme ω , en presencia del campo magnético horizontal $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{i}$

1. Determine el flujo $\Phi(t)$ del campo magnético que atraviesa la bobina en el instante t si en el instante inicial $t = 0$ la normal al plano de la bobina estaba en la dirección de \mathbf{B}_0 . (0.5 pts)

$$\Phi(t) = N \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{S}_0 = N \pi a^2 B_0 \cos \omega t = \Phi_0 \cos \omega t, \quad \text{con}$$

$$\Phi_0 = N \pi a^2 B_0$$

2. Calcule la fuerza electromotriz instantánea $\varepsilon(t)$ y la intensidad instantánea $I(t)$ que se inducen en la bobina. (0.5+0.5 pts)

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \Phi_0 \omega \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad \varepsilon_0 = \Phi_0 \omega$$

$$I(t) = \varepsilon(t)/R = I_0 \sin \omega t \quad \text{con} \quad I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

3. Calcule también la potencia instantánea $P(t)$ necesaria para mantener la bobina en movimiento, así como su valor medio¹. (Desprecie la autoinducción en la bobina). (0.5+0.5 pts)

$$P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon(t)^2/R = (\varepsilon_0^2/R) \sin^2 \omega t$$

$$\langle P \rangle = (\varepsilon_0^2/R) \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \varepsilon_0^2/2R, \quad \text{pues} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = 1/2$$

4. Determine el campo magnético inducido en el centro de la bobina $\mathbf{B}_i(t)$, el campo magnético total $\mathbf{B}(t)$ y su valor medio $\langle \mathbf{B} \rangle$. (1.0+1.0+1.0 +0.5 pts)

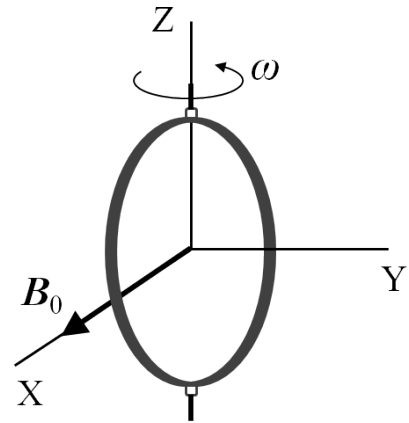
El módulo del campo magnético inducido en el centro de la bobina es

$$B_i(t) = \frac{\mu_0 N I(t)}{2a} = B_i \sin \omega t, \quad \text{con} \quad B_i = \frac{\mu_0 N I_0}{2a} = \frac{\mu_0 N \varepsilon_0}{2aR} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R}.$$

¹El valor medio $\langle X \rangle$ de una cantidad $X(t)$ en un sistema periódico de periodo T es $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$

Algunas integrales que puede necesitar:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$$



Además, está alineado perpendicularmente al plano de la bobina, por tanto:

$\mathbf{B}_i(t) = B_i(t)(\mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t)$; explícitamente:

$$B_{ix}(t) = B_i \sin \omega t \cos \omega t \Rightarrow \langle B_{ix} \rangle = B_i \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$$

$$B_{iy}(t) = B_i \sin \omega t \sin \omega t \Rightarrow \langle B_{iy} \rangle = B_i \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = B_i/2$$

El campo magnético total y su valor medio resultan ser

$$\mathbf{B}_T(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i(t) \Rightarrow \langle B_{Tx} \rangle = B_0 + \langle B_{ix} \rangle = B_0, \quad \langle B_{Ty} \rangle = \langle B_{iy} \rangle = B_i/2$$

Este sistema sirve para medir la resistencia de la bobina en función de la permeabilidad del aire μ_0 y los parámetros mecánicos y geométricos del sistema. Para ello, se coloca una pequeña aguja magnética en el centro de la bobina, como se muestra en la figura. Se la deja libre para girar en el plano horizontal alrededor del eje Z. Inicialmente intenta orientarse a lo largo del campo magnético total $\mathbf{B}(t)$ cuya variación es tan rápida que sólo alcanza a oscilar alrededor de su valor medio, hasta que se alcanza el régimen estacionario en que la aguja queda apuntando en una dirección fija que forma un ángulo θ con \mathbf{B}_0 .

5. Indique la orientación final de la aguja y determine el ángulo θ . (0.5+0.5 pts)

$$\tan \theta = \frac{\langle B_{Ty} \rangle}{\langle B_{Tx} \rangle} = \frac{B_i}{2B_0}, \text{ sustituyendo valores}$$

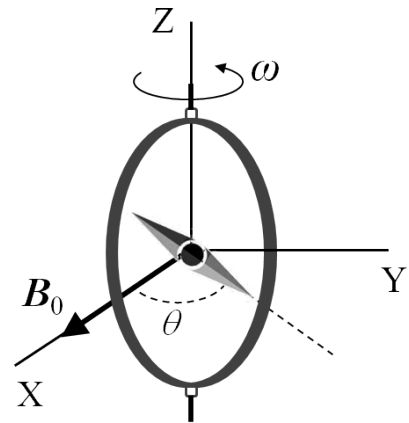
$$\tan \theta = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R}$$

6. Obtenga la resistencia R de la bobina en función de la permeabilidad magnética μ_0 y de los parámetros geométricos y mecánicos del sistema. (0.5 pts)

Despejando del resultado anterior,

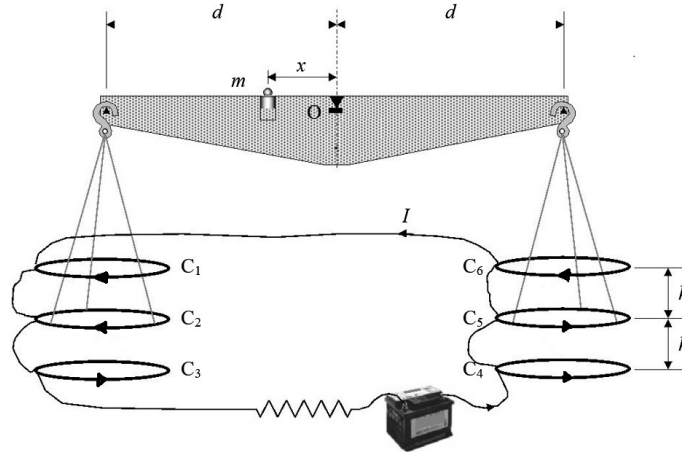
$$R = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4 \tan \theta}$$

que permite obtener la resistencia de la bobina en función de la permeabilidad magnética μ_0 y de los parámetros geométricos y mecánicos del sistema. Lord Kelvin usó este método en la década de 1860 para establecer el estándar absoluto para el ohmio.



Determinación de la intensidad de una corriente

Haciendo que pase una corriente a través de dos conductores y midiendo la fuerza entre ellos puede proporcionar una determinación absoluta de su intensidad. La “Balanza de corriente” explota este método. Consta de seis bobinas idénticas, $C_1 \dots C_6$, de una vuelta cada una y de radio a , conectadas en serie.



En la figura se ha omitido el mecanismo de sujeción de las bobinas C_1 , C_3 , y las C_4 , C_6 , que están fijadas en dos planos horizontales separados por una pequeña distancia $2h$. Por el contrario, como muestra la figura, las bobinas móviles C_2 y C_5 están suspendidas de los brazos de la balanza, de longitud d , y en equilibrio quedan equidistantes de ambos planos horizontales. Las dimensiones del aparato son tales que se pueden despreciar los efectos mutuos entre las espiras de la izquierda y de la derecha.

Una corriente de intensidad I , que se quiere determinar, fluye a través de las diversas espiras en las direcciones indicadas en la figura. Para mantener la balanza en la posición de equilibrio descrita anteriormente cuando dicha corriente fluye a través del circuito se requiere una masa m colocada a una distancia x del fulcro O .

7. Calcule la fuerza F sobre C_2 debido a la interacción magnética con C_1 . Para ello, calcule^{††} la fuerza por unidad de longitud entre las dos espiras como si se tratase de dos hilos conductores largos y rectos que transportan corrientes paralelas. (0.5 pts)

La fuerza por unidad de longitud, f , entre dos alambres rectos paralelos indefinidos separados por una distancia h es $f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{h}$. Por tanto, para $I_1 = I = I_2$ y longitud $2\pi a$, la fuerza F inducida en C_2 por la bobina vecina C_1 será

$$F = \frac{\mu_0 a}{h} I^2.$$

8. La corriente I se mide cuando la balanza está en equilibrio. Obtenga su valor en función de μ_0 y los parámetros físicos del sistema. (1.5+0.5 pts)

En equilibrio $mgx = 4Fd$, es decir $mgx = \frac{4\mu_0 ad}{h} I^2$. Por lo tanto, $I = \left(\frac{mghx}{4\mu_0 ad} \right)^{1/2}$;

función de nuevo de la permeabilidad magnética μ_0 y los parámetros geométricos y mecánicos del sistema.

^{††} Un cálculo detallado de la fuerza entre dos espiras circulares paralelas, que requiere integrales elípticas, indica que ésta es una buena aproximación cuando $h \ll a$ como en este caso.

Prueba experimental. Fosforescencia

OBJETIVO

Algunas moléculas, después de haber sido excitadas con radiación electromagnética en la región visible o ultravioleta, emiten durante un tiempo radiación de mayor longitud que la absorbida durante la excitación. Este fenómeno se denomina *fosforescencia*.

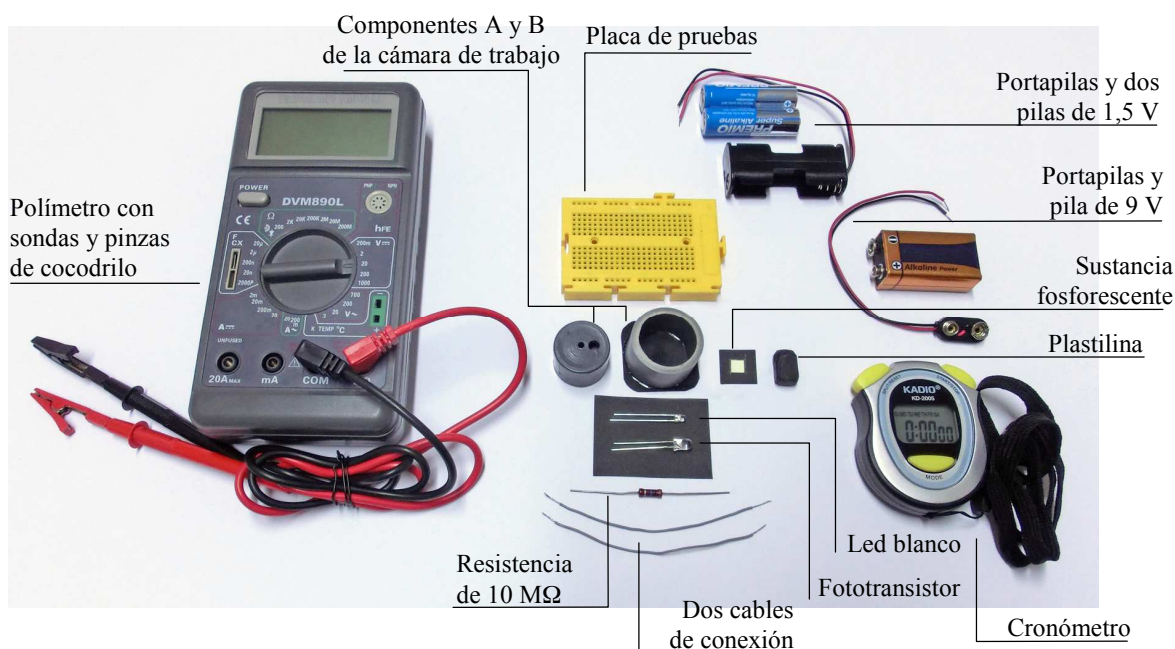
En 1867 Edmond Becquerel (padre de Henri Becquerel, el descubridor de la radiactividad) propuso una expresión empírica que establecía la intensidad luminosa emitida por una sustancia fosforescente en función del tiempo. La expresión puede escribirse del siguiente modo:

$$I = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^b} \quad (1)$$

Donde I_0 es la intensidad inicial, I es la intensidad que muestra en un instante t , posterior al cese de la excitación, τ es un parámetro que tiene unidades de tiempo e indica la rapidez con que decae la intensidad y b es otro parámetro que depende de la sustancia.

El objetivo de la prueba es determinar experimentalmente los valores de los parámetros τ y b .

MATERIAL



FUNDAMENTO TEÓRICO

Una sustancia fosforescente que se encuentra en el interior de una cámara se excita con la luz de un led blanco. Al apagar el led, la medida de la intensidad luminosa emitida por la sustancia fosforescente se realiza con un fototransistor montado en un circuito con una resistencia y una pila (Fig. 1).

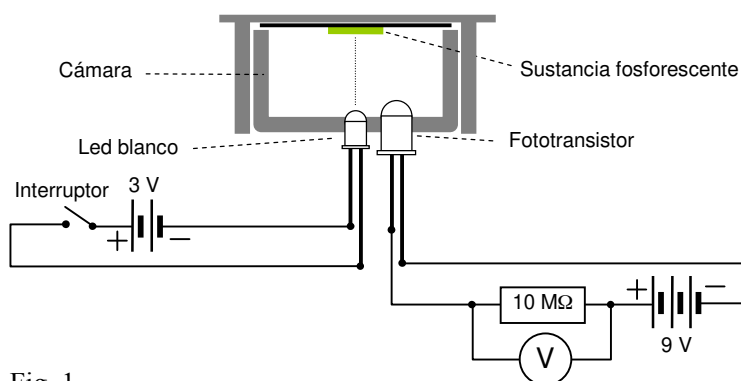


Fig. 1

La diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia es directamente proporcional a la intensidad luminosa, por lo que la expresión (1) puede escribirse así:

$$V = \frac{V_0}{\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^b} \quad (2)$$

donde V_0 es la diferencia de potencial que corresponde a la intensidad luminosa inicial y V la diferencia de potencial en un instante t .

La expresión (2) puede reescribirse en la forma:

$$V = \frac{V_0 \tau^b}{(t + \tau)^b},$$

o bien:

$$V(t + \tau)^b = V_0 \tau^b \quad (3)$$

Cuando se inicia la toma de medidas en un instante t_1 , en el que el voltímetro marca V_1 , se tiene que:

$$V_1(t_1 + \tau)^b = V_0 \tau^b \quad (4)$$

Si los sucesivos tiempos de medida, t , son mucho mayores que τ , ($t \geq t_1 \gg \tau$) la expresión (3) puede aproximarse a:

$$Vt^b \approx V_0 \tau^b \quad (5)$$

Sustituyendo (4) en (5) se tiene:

$$V_1(t_1 + \tau)^b = Vt^b,$$

o bien:

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{t_1 + \tau}{t}\right)^b \quad (6)$$

MONTAJE

 <p>A B</p>	<p>1. La cámara para estudiar la fosforescencia consta de una pieza cilíndrica, A, con dos orificios, que se introducirá después en otra pieza cilíndrica, B.</p>	 <p>4. Poner el cuadrado de cartulina negra que contiene la muestra fosforescente en el interior de la pieza B, con la parte fosforescente hacia fuera.</p>
 <p><i>Patillas largas</i></p>	<p>2. En el orificio central de la pieza A se inserta completamente el led (3 mm de diámetro) y en el orificio lateral se inserta el fototransistor (5 mm de diámetro). Las patillas cortas y largas de los dos componentes quedarán en el orden que muestra la figura.</p>	 <p>5. Introducir la pieza A en el interior de la pieza B.</p>
	<p>3. Se cubre totalmente la parte exterior de los dos componentes eléctricos con un poco de plastilina. De este modo, se impide que llegue luz alguna a los mismos.</p>	 <p>6. Insertar en la placa de pruebas las patillas de la cámara.</p>
		<p>7. Completar el montaje de los circuitos, de acuerdo con el esquema de la figura 1.</p>

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

1. Disponga el equipo según lo indicado en “Montaje”, excluyendo de momento el paso 4, es decir, sin introducir la muestra fosforescente en la cámara. Asegure de haber montado los circuitos según lo indicado en el paso 7 de “Montaje” para que el led no esté conectado accidentalmente a la pila de 9 V. Inserte la pila de 9 V en su portapilas y las dos pilas de 1,5 V en el suyo.

Ponga el voltímetro en la escala de 20 V y pulse su botón de encendido. Si retira la pieza B de la cámara tendrá que ver encendido el led y el voltímetro marcará aproximadamente 9 V, debido a la luz ambiente que incide en el fototransistor. Si el voltímetro no marca correctamente, asegure de que las patillas de todos los componentes hacen buen contacto.

Ponga nuevamente en su posición la pieza B con la muestra fosforescente (paso 4 del “Montaje”) y retire uno de los cables que van del portapilas de 3 V a la placa de pruebas, con el fin de apagar el led.

2. Excitación de la muestra. Conecte a la placa de pruebas el cable del portapilas que se desconectó en el paso anterior, y al mismo tiempo ponga en marcha el cronómetro. El led blanco deberá excitar la muestra fosforescente durante 2 min, aproximadamente. Como no se trata de un tiempo exacto, corte el cronómetro por ejemplo 15 s antes de apagar el led y póngalo a cero, con el fin de tenerlo preparado para la siguiente actuación.

Para finalizar la excitación, desconecte el led extrayendo de la placa de pruebas el anterior cable del portapilas de 3 V y, simultáneamente, ponga en marcha el cronómetro.

3. Toma de datos. En los primeros segundos las indicaciones del voltímetro descienden con tal rapidez que es prácticamente imposible tomar datos. Tome la primera medida, V_1 , para un tiempo $t_1 = 60$ s y continúe tomando medidas, V , a intervalos de 5 s, hasta finalizar en 130 s. Es recomendable situar el cronómetro muy cerca del voltímetro para ver simultáneamente las dos pantallas y tomar las lecturas.

Traslade todos los datos a una tabla como la siguiente:

Nº medida	t (s)	V (V)
1	60	
2	65	
...	...	

4. Transforme la ecuación (6) para obtener una dependencia lineal entre una función de V/V_1 y una función de t .

5. Con el fin de incluir las funciones obtenidas en el apartado 4, amplíe la tabla del apartado 3, como se muestra a continuación:

Nº medida	t (s)	V (V)	V/V_1	Función de t	Función de V/V_1
1	60				
2	65				
...	...				

6. Represente gráficamente en papel milimetrado los puntos correspondientes a la dependencia lineal esperada, con la función de t en abscisas.

7. Determine la pendiente, p , y la ordenada en el origen, a , de la recta que mejor se ajusta a esos puntos.

8. A partir de la pendiente y de la ordenada en el origen, determine el valor de los parámetros b y τ .

9. Haga una estimación de la incertidumbre del parámetro b .

Prueba experimental. SOLUCIÓN

Apartado 3. (3 puntos)

Nº medida	t / s	V / V
1	60	0,72
2	65	0,68
3	70	0,63
4	75	0,59
5	80	0,55
6	85	0,52
7	90	0,49
8	95	0,47
9	100	0,44
10	105	0,42
11	110	0,40
12	115	0,38
13	120	0,37
14	125	0,35
15	130	0,34

Apartado 4. (3 puntos)

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{t_1 + \tau}{t} \right)^b \quad (6)$$

Tomando logaritmos en la expresión (6), se tiene:

$$\ln \frac{V}{V_1} = b \ln(t_1 + \tau) - b \ln t \quad (7)$$

De modo que al representar $\ln \frac{V}{V_1}$ frente a $\ln t$ se obtendrá una línea recta en la que:

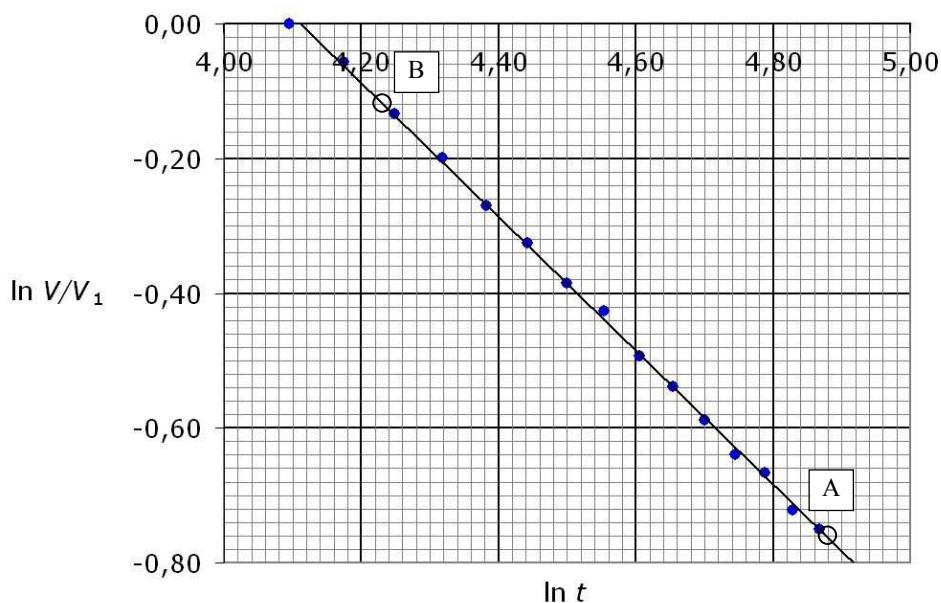
Pendiente, $p = b$

Ordenada en el origen = $b \ln(t_1 + \tau)$

Apartado 5. (3 puntos)

Nº medida	t / s	V / V	V / V_1	$\ln t$	$\ln (V / V_1)$
1	60	0,72	1,000	4,094	0,000
2	65	0,68	0,944	4,174	-0,057
3	70	0,63	0,875	4,248	-0,134
4	75	0,59	0,819	4,317	-0,199
5	80	0,55	0,764	4,382	-0,269
6	85	0,52	0,722	4,443	-0,325
7	90	0,49	0,681	4,500	-0,385
8	95	0,47	0,653	4,554	-0,427
9	100	0,44	0,611	4,605	-0,492
10	105	0,42	0,583	4,654	-0,539
11	110	0,40	0,556	4,700	-0,588
12	115	0,38	0,528	4,745	-0,639
13	120	0,37	0,514	4,787	-0,666
14	125	0,35	0,486	4,828	-0,721
15	130	0,34	0,472	4,868	-0,750

Apartados 6 y 7. (3 puntos) y (3 puntos)



Resolución “manual”.

Se toman dos puntos de la recta, A y B, suficientemente separados:

A (4,88, -0,76)

B (4,23, -0,12)

De donde se obtiene la ecuación de la recta: $y = -0,985x + 4,049$

Pendiente, $p = -0,985$
 Ordenada en el origen, $a = 4,049$

Apartado 8. (2 puntos)

$$0,985 = b$$

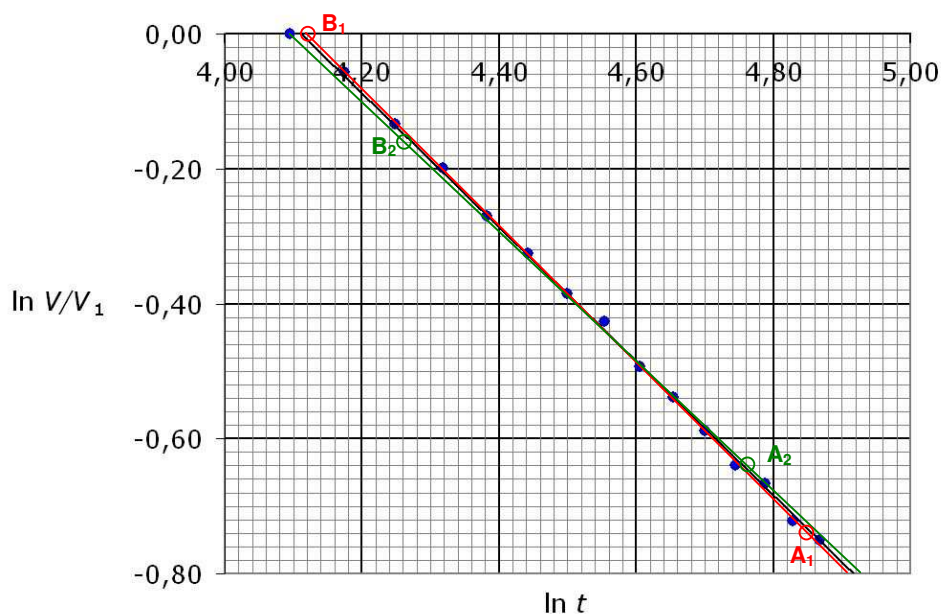
$$4,049 = 0,985 \ln(60 + \tau)$$

$$b = 0,985; \tau = 1,09 \text{ s}$$

Resolución analítica de los apartados 7 y 8.

$$y = -0,994x + 4,084; \text{ que conduce a los valores: } b = 0,994; \tau = 0,61 \text{ s}$$

Apartado 9. (3 puntos)



Se trazan líneas de máxima y mínima pendiente.

Línea de máxima pendiente: $A_1(4,85, -0,74)$; $B_1(4,12, 0,00)$; $p_1 = -1,013$; $b_1 = 1,013$

Línea de mínima pendiente: $A_2(4,76, -0,64)$; $B_2(4,26, -0,16)$; $p_2 = -0,960$; $b_2 = 0,960$

$$\Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2} = \frac{1,013 - 0,960}{2} = 0,027$$

$$\Delta b = 0,03; \quad b = 0,99 \pm 0,03$$

Resolución analítica

$$b \pm \Delta b = 0,994 \pm 0,008$$