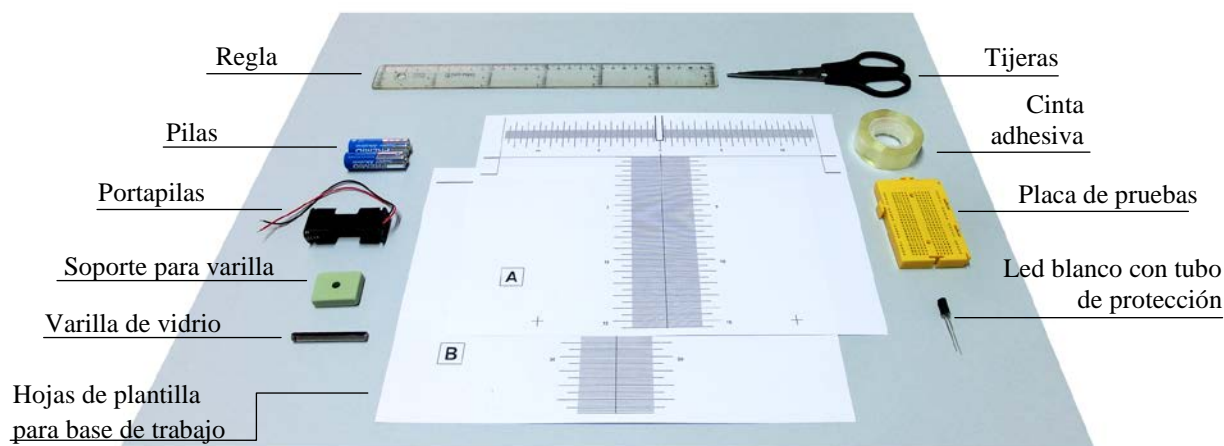


El rayo del arco iris

OBJETIVO

Determinar el índice de refracción del vidrio de una varilla cilíndrica a partir de la desviación angular del rayo del arco iris.

MATERIAL



FUNDAMENTO TEÓRICO

Considere un cuerpo transparente de sección circular de radio R (esfera o cilindro) rodeado de aire, sobre el que incide una haz de rayos paralelos de luz monocromática (figura 1). Supondremos que el índice de refracción del aire es la unidad y llamaremos n al índice de refracción del cuerpo.

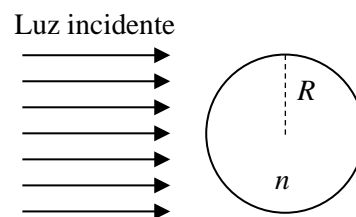


Fig. 1

Cuando uno de estos rayos alcanza la superficie frontera entre el aire y el cuerpo (figura 2), gran parte de la energía luminosa incidente se refracta en la dirección prevista por la Ley de Snell, y el resto se refleja en dirección simétrica respecto a la normal¹ (rayo 1). El rayo refractado alcanza de nuevo la superficie frontera, donde parte de la energía se transmite al aire (rayo 2) y el resto se refleja. Este proceso se repite indefinidamente, de forma que un solo rayo incidente da origen a una serie de rayos emergentes, 1, 2, 3, 4... con energías decrecientes.

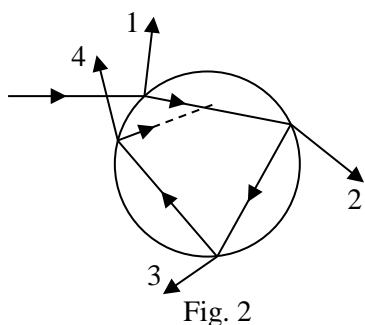


Fig. 2

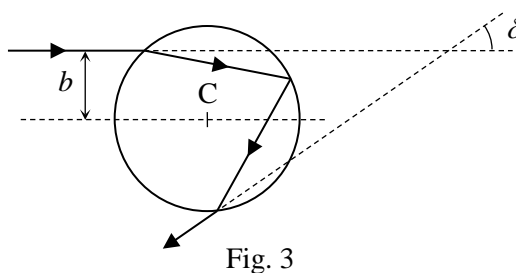


Fig. 3

Vamos a centrarnos en el rayo emergente 3, que ha sufrido una única reflexión interna (figura 3). Llamaremos δ a la desviación angular entre la trayectoria de este rayo y la del incidente. El valor de δ depende del *parámetro de impacto* b del rayo incidente (distancia entre este rayo y el centro C de la circunferencia).

¹ El reparto energético en un proceso de reflexión/refracción depende de muchas variables, entre ellas la polarización de la luz incidente. Si tiene curiosidad, busque información sobre las llamadas *Fórmulas de Fresnel*.

Para valores crecientes desde $b = 0$, δ va creciendo hasta alcanzar un valor máximo δ_{\max} para un cierto valor de b . Para valores superiores de b , la desviación angular disminuye, como puede observarse en la figura 4.

El rayo que sufre la desviación máxima se conoce como *rayo del arco iris*. Su desviación angular está relacionada con el índice de refracción en la forma

$$\delta_{\max} = 4 \arcsin \left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \right) - 2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \right) \quad (1)$$

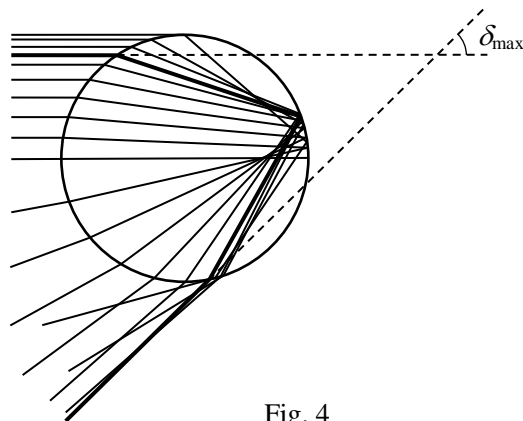


Fig. 4

Dado que la función $\delta(b)$ presenta un máximo, es fácil comprender que todos los rayos que inciden con parámetros de impacto próximos al de desviación máxima emergen con ángulos próximos a δ_{\max} , de forma que se produce una concentración energética (conocida en óptica como *cáustica*), es decir una alta luminosidad, en esta dirección.

Por otra parte, el índice de refracción n depende ligeramente de la longitud de onda de la luz incidente (*dispersión cromática* del material), de forma que δ_{\max} es ligeramente diferente para cada color componente de la luz blanca. Todo ello permite explicar el fenómeno del arco iris, que aparece cuando la luz solar incide sobre un conjunto de gotitas esféricas de agua ($n \approx 1,33$). En este caso, dada la simetría de revolución en torno a la dirección de iluminación, se observan sucesivas cáusticas circulares concéntricas para cada color, con tamaños angulares próximos a 42° .

En esta prueba experimental no se va a trabajar con esferas de agua, sino con una delgada varilla cilíndrica de vidrio situada en posición vertical e iluminada con un led blanco (espectro aproximadamente uniforme del violeta al rojo), por lo que se observarán franjas verticales brillantes de los sucesivos colores visibles, cada uno a su correspondiente desviación angular δ_{\max} . Para evitar pérdidas por transmisión y mejorar la luminosidad del fenómeno, la parte posterior de la varilla cilíndrica está espejada.

El objetivo de la prueba es determinar el índice de refracción de la varilla de vidrio para un color visible a partir de la medida del ángulo δ_{\max} , trabajando con diferentes distancias entre el plano de observación y la varilla.

En el montaje experimental que va a emplear, el led se sitúa en el centro de una pantalla vertical milimetrada, en la que podrá observar, a cada lado del led, las franjas verticales del rayo del arco iris en los sucesivos colores del espectro, y medir su desviación lateral respecto al eje óptico del sistema, y . La varilla cilíndrica se sitúa vertical, a una distancia mucho mayor que el radio de la varilla, de forma que sobre ésta llegan rayos aproximadamente paralelos al eje. En la figura 5 (que no está dibujada a escala) se observa que podría determinarse δ_{\max} para cada color en la forma

$$\tan \delta_{\max} = \frac{Y}{X}$$

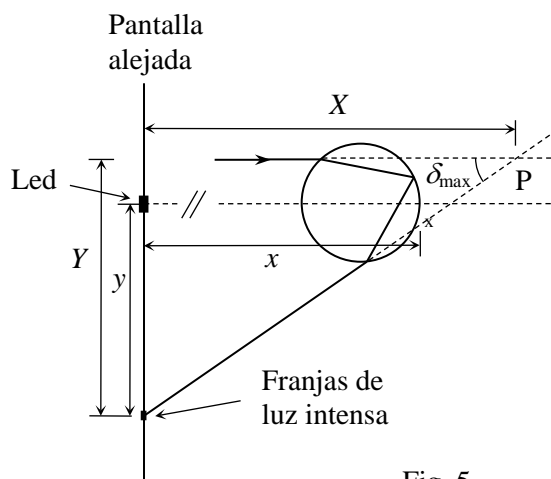


Fig. 5

Por tanto, bastaría medir X e Y para varias distancias pantalla-varilla y representar gráficamente los puntos experimentales (X, Y) . La pendiente de la recta que, pasando por el origen, mejor se ajustase a estos puntos experimentales sería la tangente de δ_{\max} .

Pero tanto X como Y son distancias al punto P , donde se cruzan virtualmente los rayos incidente y emergente de la varilla, y este punto no puede localizarse experimentalmente. Lo que puede medirse son las distancias x e y al vértice posterior de la varilla. La diferencia entre X y x es aproximadamente independiente de la distancia entre la pantalla y la varilla, y lo mismo ocurre con la diferencia entre Y e y . Por tanto, es fácil comprender que se espera que los puntos (x, y) estén alineados en una recta de pendiente igual a la tangente de δ_{\max} , aunque sin pasar por el origen.

$$y = x \tan \delta_{\max} + \text{Cte.} \quad (2)$$

MONTAJE

Base de trabajo

La base de trabajo consta de dos piezas de papel, que van marcadas con las letras A y B, respectivamente, y debe prepararse según se muestra en la figura 6.



Fig. 6

Sistema de iluminación

Inserte las pilas en el portapilas (**atención:** mantenga separados los cables del portapilas para evitar que se produzca un cortocircuito).

El led debe montarse de acuerdo con el esquema indicado en la figura 7a. Curve las patillas del led según se muestra en la figura 7b. La patilla más larga debe conectarse al polo positivo de las pilas (cable rojo).

Conecte el led y el portapilas sobre la base de montaje (placa de pruebas), teniendo en cuenta sus conexiones internas, según se indica en la figura 7c. Una vez comprobado que el led emite luz, desconecte uno de los cables del portapilas, para evitar que se agoten las pilas.

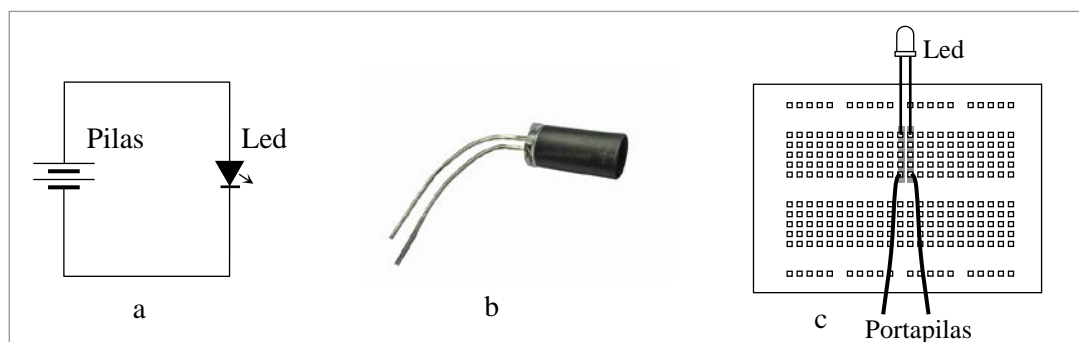


Fig. 7

Montaje final

Disponga el sistema de iluminación de forma que el extremo del led quede junto a la ranura central de la pantalla de observación (figura 8a). Asegúrese de que los dos lados de esta pantalla están bien verticales.

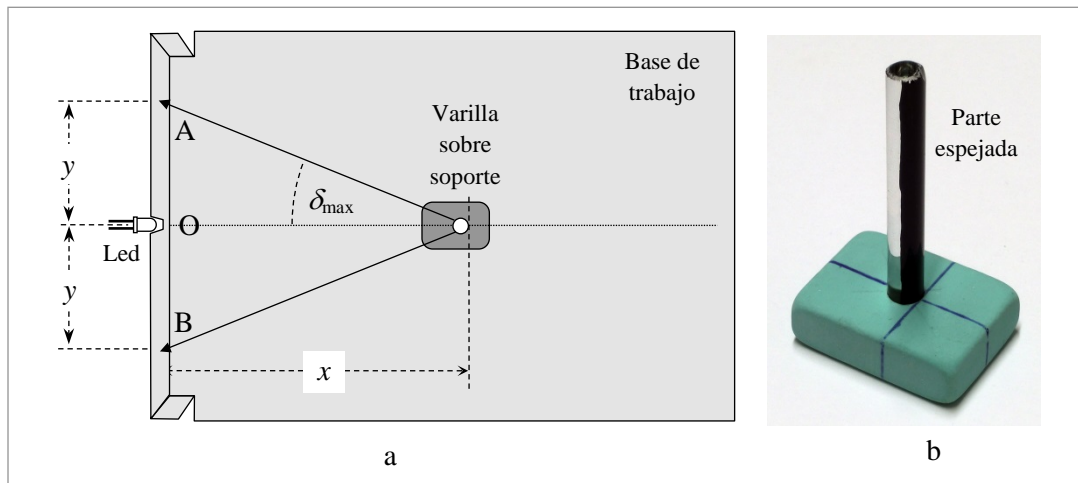


Fig. 8

Para facilitar las medidas posteriores, es conveniente que dibuje en la goma que va a actuar como soporte de la varilla una línea tangente con la parte posterior del orificio y otra centrada longitudinal (figura 8b). Limpie suavemente la varilla con el papel en que va envuelta e insértela en el orificio de la goma soporte, con la parte espejada hacia atrás. El espejo está recubierto con pintura negra protectora. Coloque el conjunto sobre el eje central de la base de trabajo, de modo que el lado espejado de la varilla quede opuesto al led.

Conecte el cable del portapilas que estaba suelto y ajuste la posición del led y de la varilla hasta que se observe la descomposición espectral de la luz blanca en dos posiciones A y B aproximadamente equidistantes del centro, O.

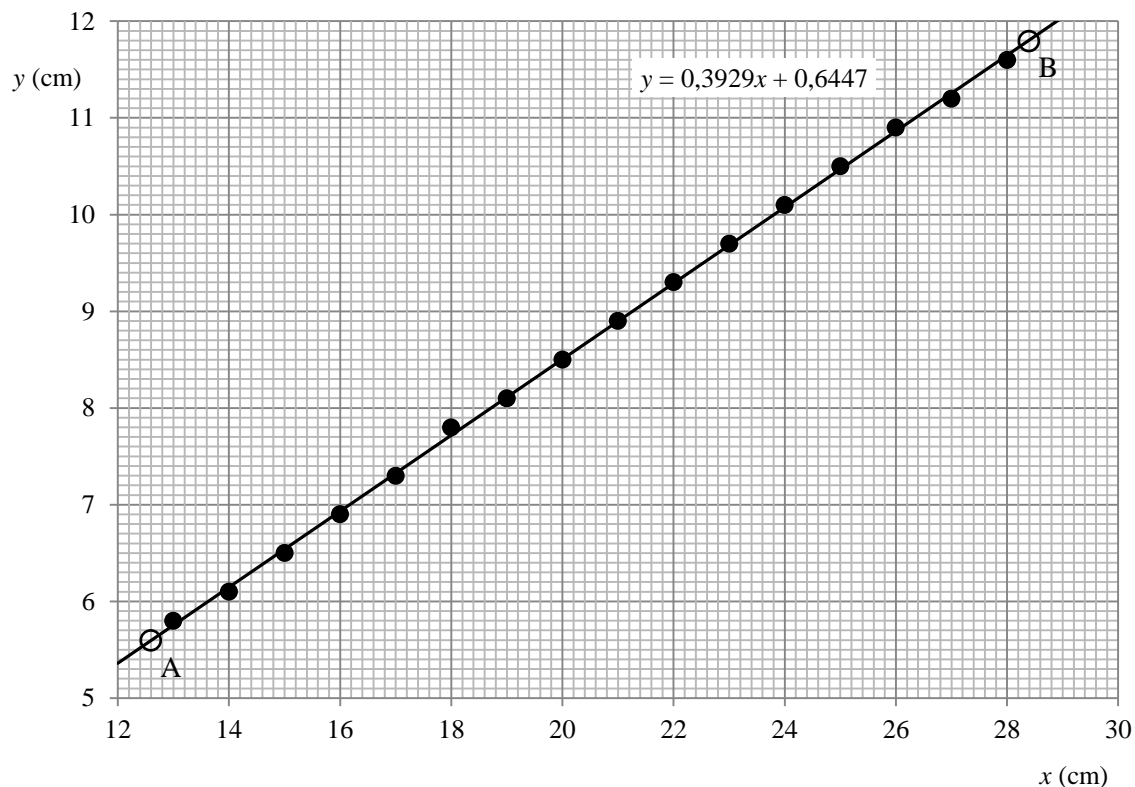
PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

1. Para varias posiciones de la varilla, con x comprendida entre 13 cm y 28 cm, mida el valor de y para el color rojo. Para medir x le será útil la línea transversal dibujada sobre la goma soporte. El valor de y se puede obtener hallando el valor medio de las distancias OA y OB. Presente los datos en una tabla. (4 p.)
2. Traslade a una gráfica, con y en ordenadas y x en abscisas, los puntos experimentales anteriores. (3 p.)
3. Determine la pendiente p de la recta que mejor se ajusta a los puntos de esta gráfica y deduzca el valor de δ_{\max} para el color rojo. (3 p.)
4. Haga una estimación de la incertidumbre de δ_{\max} . (3 p.)
5. La expresión (1) permite relacionar n con δ_{\max} , pero no es posible despejar n . Construya una tabla en la que se recojan, en grados, los ángulos δ_{\max} para n comprendidos entre 1,45 y 1,55, a intervalos de 0,01. Traslade a una gráfica, con δ_{\max} en ordenadas y n en abscisas, los valores anteriores y trace la línea que pasa suavemente por estos puntos. (2 p.)
6. Interpolando visualmente en la gráfica anterior, determine el índice de refracción del vidrio de la varilla para el color rojo. Si es posible, intente obtener n con tres decimales. (2 p.)
7. Empleando de nuevo la gráfica del apartado 5, haga una estimación de la incertidumbre de n . Escriba el resultado final del experimento (n para el color rojo con su incertidumbre) con el número adecuado de cifras significativas. (3 p.)

1.- Tabla de datos, para el color rojo

x (cm)	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0	20,0	21,0	22,0	23,0	24,0	25,0	26,0	27,0	28,0
y (cm)	5,8	6,1	6,5	6,9	7,3	7,8	8,1	8,5	8,9	9,3	9,7	10,1	10,5	10,9	11,2	11,6

2.- Gráfica



3.- Ajuste.

Los puntos se ajustan bien a una recta, de acuerdo con lo previsto en (2).

La pendiente puede determinarse a partir de las coordenadas de dos puntos auxiliares alejados sobre la recta y situados en cruces de la cuadrícula, para facilitar su lectura precisa: A(12,6; 5,6) y B(28,4; 11,8).

Se obtiene una pendiente

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0,3924$$

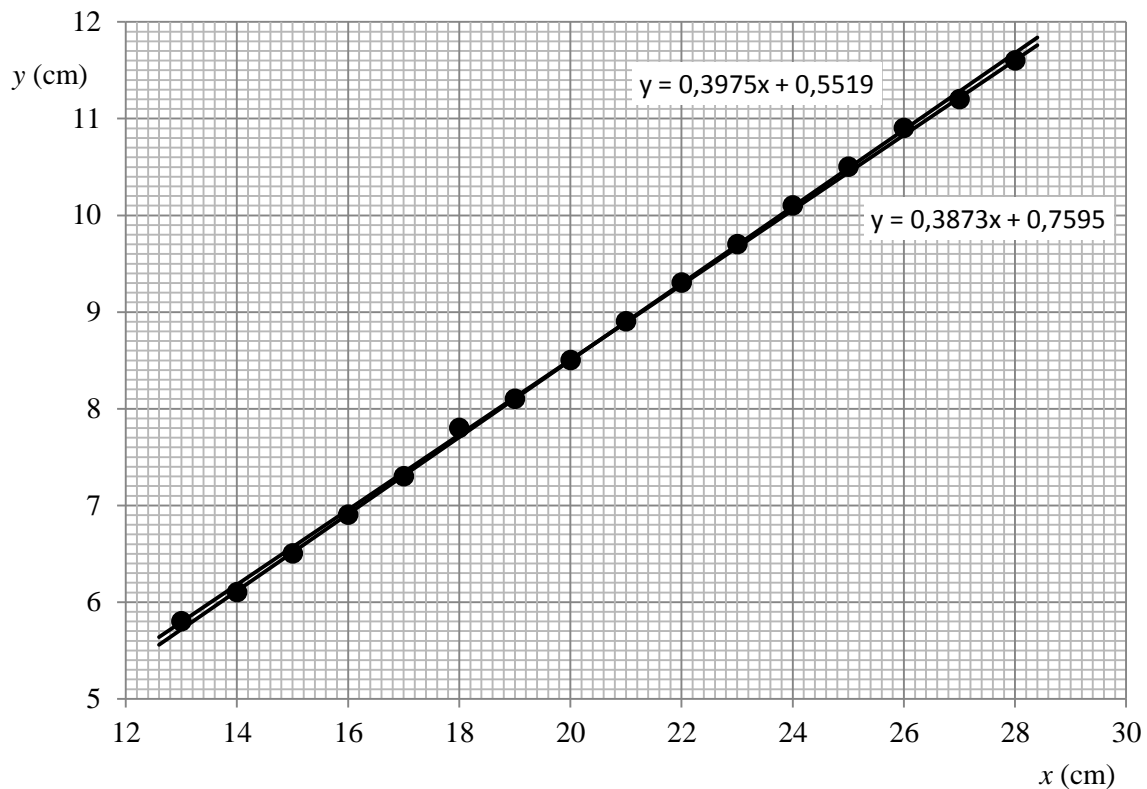
La pendiente obtenida aplicando el método de mínimos cuadrados se presenta en la gráfica y tiene un valor similar.

Según (2), esta pendiente es la tangente del ángulo del arco iris para el color rojo. Por tanto

$$\delta_{\max} = \tan^{-1} p = 21,43^\circ$$

4.- Incertidumbre de δ_{\max} .

Se observa que la dispersión de los puntos experimentales respecto a la mejor recta es muy baja. La incertidumbre de los puntos experimentales puede estimarse en $\Delta y = 1 \text{ mm}$ puesto que la línea vertical roja que se observa no es muy nítida y además tiene una anchura no despreciable. La barra de error correspondiente coincide prácticamente con el tamaño de los puntos dibujados. Teniendo esto en cuenta, en la siguiente gráfica se presentan las rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales, junto con las pendientes ajustadas.



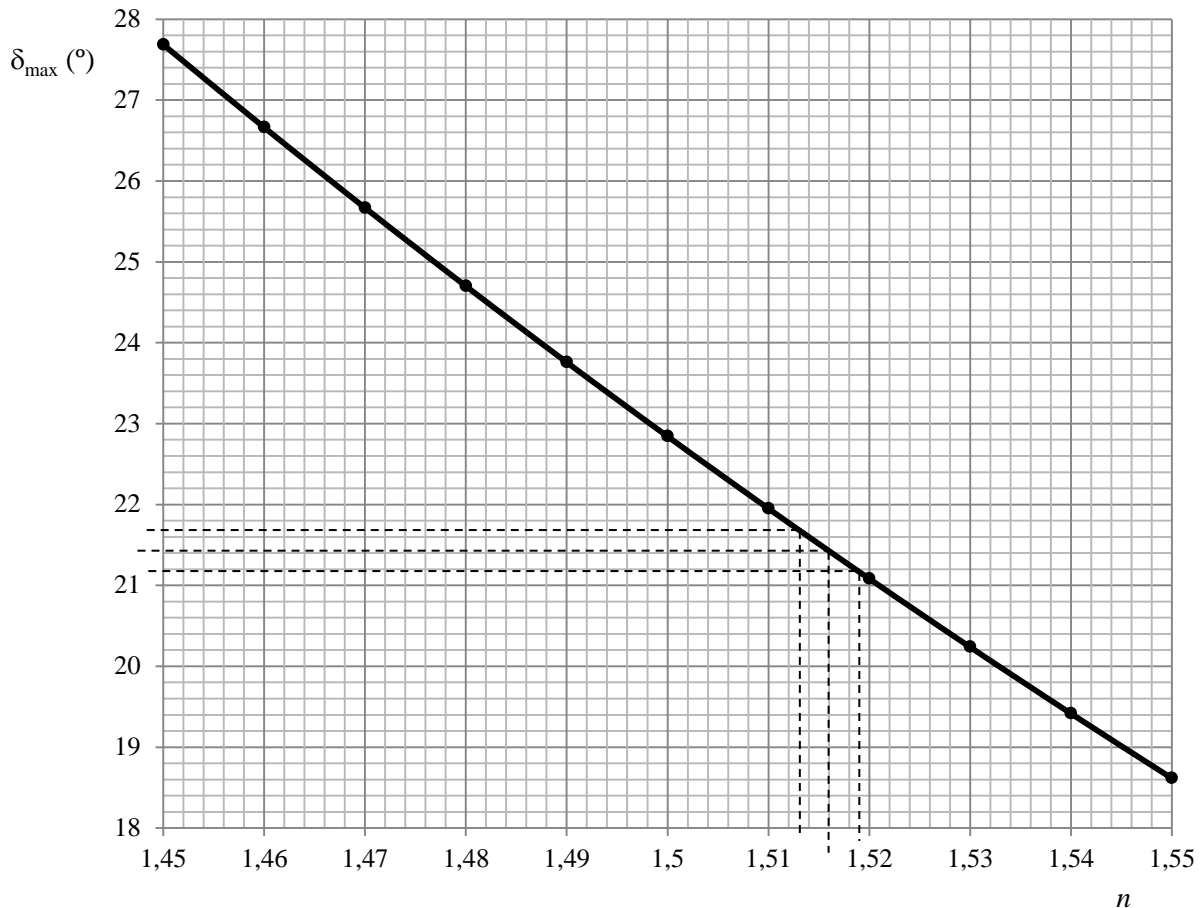
A partir de estas dos pendientes se obtienen los valores máximo y mínimo de δ_{\max} . Su incertidumbre es la semidiferencia de estos valores. Se obtiene

$$\Delta\delta_{\max} = 0,25^\circ$$

Con un tratamiento estadístico se obtiene que el error típico de δ_{\max} es de $0,11^\circ$, y que el margen de incertidumbre, con una fiabilidad del 95%, es de $0,23^\circ$.

5.- Tabla y gráfica $\delta_{\max}(n)$.

n	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55
δ_{\max}	27,69	26,66	25,67	24,70	23,76	22,84	21,95	21,08	20,24	19,42	18,62



6.- Considerando el valor $\delta_{\max} = 21,43^\circ$ obtenido en el apartado 3, la gráfica nos indica que, para el color rojo,

$$n = 1,516$$

La incertidumbre de la lectura en la gráfica es del orden algunas unidades en el cuarto decimal, por lo que el tercer decimal de n puede considerarse significativo.

La precisión de este resultado podría mejorarse utilizando una gráfica con un rango menor de n , por ejemplo entre 1,51 y 1,52, o por otros métodos numéricos. Pero, como veremos en el siguiente apartado, no se necesita una precisión mayor.

7.- Siguiendo el mismo método gráfico del apartado anterior, pueden obtenerse los valores máximo y mínimo de n , leyendo en la gráfica el índice correspondiente a $\delta_{\max} + \Delta\delta_{\max} = 21,68^\circ$ y $\delta_{\max} - \Delta\delta_{\max} = 21,18^\circ$

$$n_{\min} = 1,513 \qquad n_{\max} = 1,519$$

Por tanto, la incertidumbre de n es

$$\Delta n = \frac{n_{\max} - n_{\min}}{2} = 0,003$$

Nótese que la incertidumbre afecta al tercer decimal, por lo que no tiene sentido intentar obtener n con cuatro.

El resultado final del experimento, n para el color rojo con su incertidumbre, es

$$n = 1,516 \pm 0,003$$