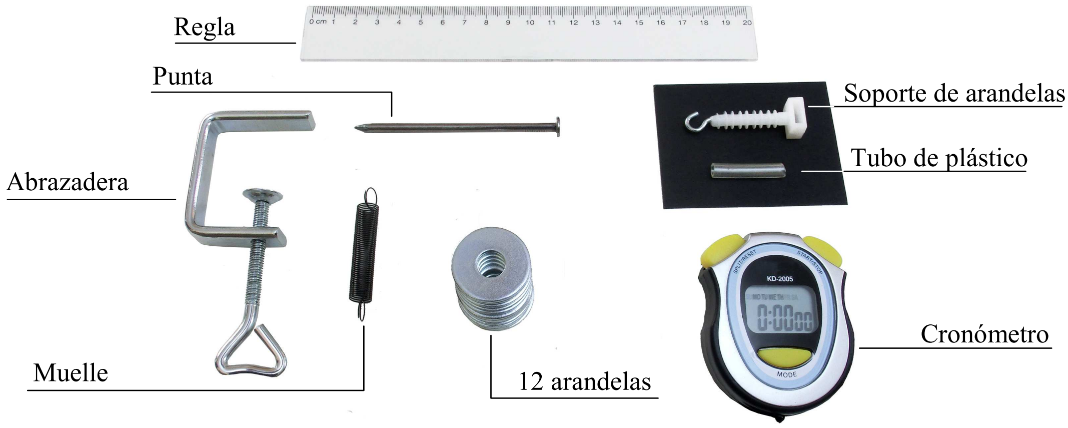
Prueba experimental
Determinación de *g* y condición de resonancia de un péndulo elástico

OBJETIVO

Determinar el valor de la aceleración de la gravedad, *g*, y encontrar experimentalmente la condición para que se produzca resonancia en un péndulo elástico.

MATERIAL



FUNDAMENTO TEÓRICO

Un cuerpo elástico, como es un muelle, se deforma al aplicar una fuerza sobre él, pero recupera su estado inicial al cesar la fuerza. En un cuerpo de este tipo las deformaciones son proporcionales a las fuerzas que actúan.

Sea un muelle suspendido de uno de sus extremos, cuya longitud es l_0. Al colgar una masa m del otro extremo, actúa una fuerza mg (donde g es la aceleración de la gravedad) que deforma el muelle, alcanzando una longitud l (figura 1). Se cumple que:

$$mg = k(l - l_0) = k\Delta l \qquad (1)$$

donde Δl representa la deformación del muelle y k es su constante elástica.

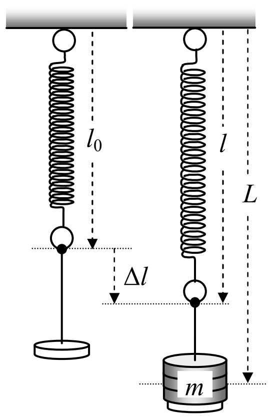


Fig. 1

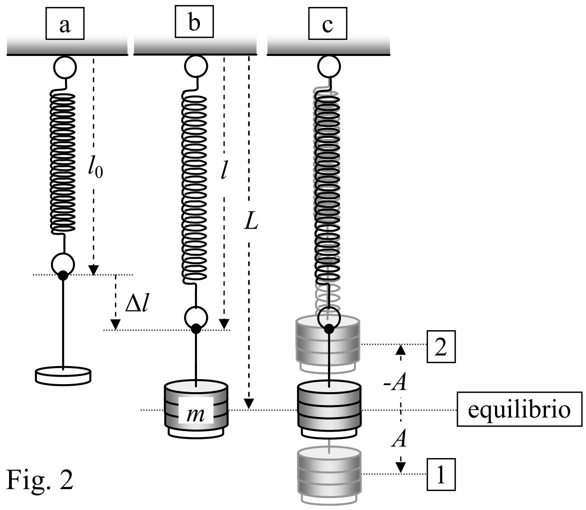


Fig. 2

Considérese ahora un muelle de longitud l_0 (figura 2a) que se alarga hasta alcanzar una longitud l cuando del extremo libre se suspende una masa m, con lo que el sistema alcanza una situación de equilibrio (figura 2b). Si desde esa posición se provoca un pequeño alargamiento del muelle de amplitud A, al soltar se produce una *oscilación elástica* entre las posiciones 1 y 2, situadas a ambos lados de la posición de equilibrio (figura 2c). El muelle realiza un movimiento armónico simple, cuyo periodo, T_{k}, es:

$$T_{\mathrm{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2}$$

Sustituyendo en (2) el valor de k, obtenido de la expresión (1), se tiene:

$$T_{\mathrm{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} \tag{3}$$

Si al extremo libre del muelle se van añadiendo sucesivamente más masas, midiendo las deformaciones producidas, Δl, y los correspondientes periodos de oscilación, T_{k}, se puede obtener el valor de la aceleración de la gravedad, g, utilizando la expresión (3). Una ventaja de este método es que no es necesario conocer el valor de las masas suspendidas ni el valor de la constante elástica del muelle.

Además del movimiento oscilatorio que se ha descrito, el muelle tiene otro grado de libertad que le permite comportarse como un péndulo. Si el muelle con una masa suspendida, se desvía lateralmente de su posición de equilibrio y se suelta, experimenta una *oscilación pendular* (figura 3) con un período T_{p}, cuyo valor es:

$$T_{\mathrm{p}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{4}$$

donde L es la distancia desde el punto de suspensión del muelle hasta el centro de masas del cuerpo suspendido.

En realidad, este péndulo, denominado *péndulo elástico*, realiza un movimiento complejo con una combinación de oscilaciones elásticas y pendulares. En una determinada situación se produce un fenómeno de resonancia y la energía se transfiere de un modo de oscilación al otro de forma cíclica. Es decir, el sistema alterna entre el comportamiento de un muelle puro y el de un péndulo puro. Esta resonancia ocurre cuando la masa suspendida toma un valor concreto, m_{res}, que guarda cierta relación con k, L y g. Entonces, entre el período de ambas oscilaciones se cumple que:

$$T_{\mathrm{p}} = n\,T_{\mathrm{k}} \tag{5}$$

donde n es un número entero cuyo valor se quiere determinar.

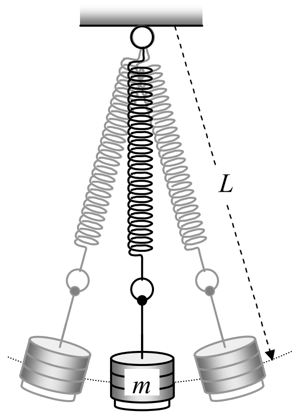


Fig. 3

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

1. Transforme la expresión (3) para obtener una dependencia lineal entre una función de T_{k} y una función de Δl, de cuya pendiente pueda obtenerse el valor de g. (1 puntos)

2. Construya el dispositivo experimental. Para ello, comience colocando el muelle y el tubo de plástico en la punta, como se muestra en la figura 4a. Aprisione con la abrazadera el extremo de la punta que tiene el plástico sobre el borde de la mesa, procurando que queden hacia arriba las muescas paralelas que hay junto a la cabeza de la punta, y cuelgue el muelle haciendo descansar su extremo sobre alguna de las muescas. Cuelgue el soporte para las arandelas del extremo libre del muelle. Mida después cuidadosamente la longitud, l_0, comprendida entre los dos extremos del muelle (figura 4b).

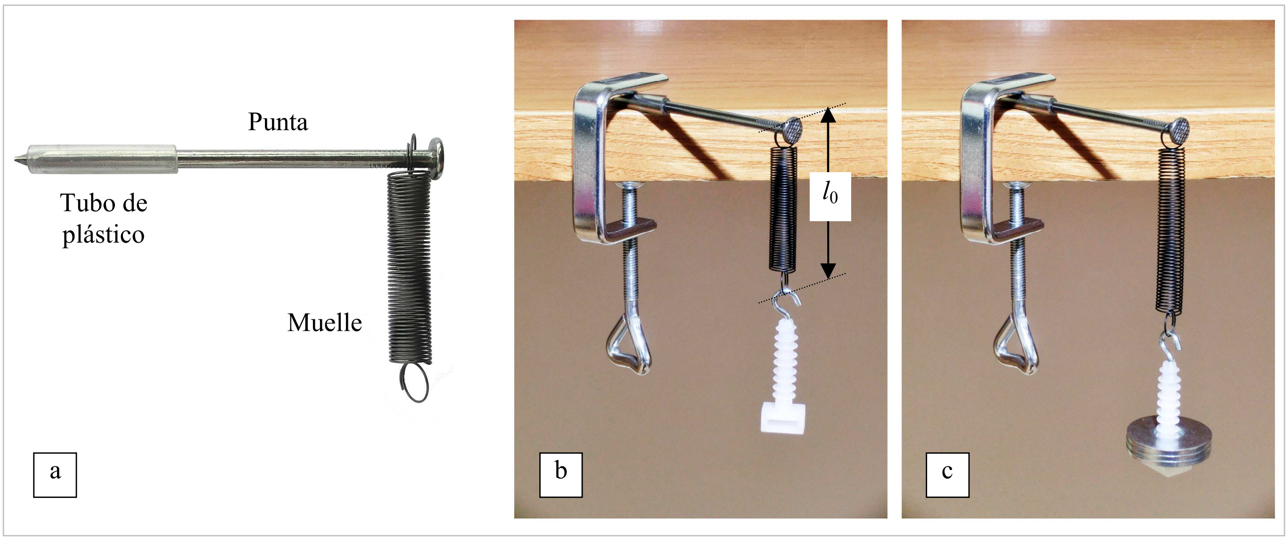


Fig. 4

3. Inicie el experimento descolgando el soporte e introduciendo en él 3 arandelas (figura 4c). Mida la nueva longitud del muelle, l, desplace **levemente** el soporte con las arandelas en dirección vertical y mida el tiempo, t_k, de 20 oscilaciones elásticas, observando el movimiento en dirección del eje Y (figura 5a). Realice dos o tres medidas para obtener un valor medio. A continuación, detenga la oscilación elástica, desplace **levemente** el muelle con las pesas de la dirección vertical y cronometre el tiempo, t_p, de 20 oscilaciones pendulares, observando el movimiento desde arriba, en la dirección de eje Z (figura 5b). Continúe el experimento añadiendo una arandela más en cada determinación, hasta finalizar con 12 arandelas.

Traslade los resultados experimentales obtenidos a una tabla como la mostrada a continuación, en la que las columnas vacías están reservadas para las funciones de T_k y de Δl que obtuvo en el apartado 1. En el caso de la resonancia, anote junto a t_k y t_p el número de oscilaciones utilizado en la medida en caso de no haber podido medir 20. (5 puntos)

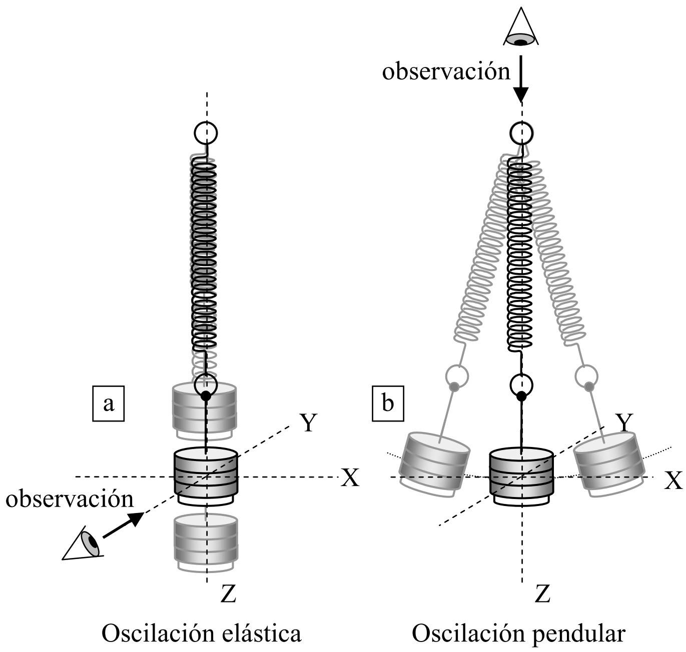


Fig. 5

Nº de arandelas	t_k / s (20 osc)	T_k / s	l / m	$\Delta l = (l - l_0)$ / m			t_p / s (20 osc)	T_p / s	T_p / T_k
0 3 . . 12	-	-	l_0	-	-	-	-	-	-

4. Para un número determinado de arandelas el dispositivo entra en resonancia. Observará que al desplazar verticalmente el muelle, tras unas pocas oscilaciones elásticas, éste se separa de la vertical y empieza a pendular. A continuación ocurre lo contrario, desaparecen las oscilaciones pendulares y aparecen de nuevo las oscilaciones elásticas. Anote el número de arandelas para el que se da esta situación de resonancia y mida la longitud L para este caso. (2 puntos)

5. Represente gráficamente en papel milimetrado los puntos de la dependencia lineal y trace la línea que mejor se ajusta. (3 puntos)

6. Determine el valor de la pendiente, p, de la línea trazada y obtenga el valor de g. (3 puntos)

7. Haga una estimación de la incertidumbre de la pendiente, Δp, y, a partir de ella, halle la incertidumbre, Δg. (3 puntos)

8. A partir del cociente T_p/T_k encontrado para la situación de resonancia, determine el valor de n de la expresión (5). (1 punto)

9. Con el valor de n hallado y, teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (4), determine k en función de L, de g y de la masa, m_{res}, que está suspendida del muelle cuando se da esta condición, y calcule su valor numérico sabiendo que la masa de una arandela es 10,2 g (como la medida de la longitud l_0 se realizó con el soporte de arandelas suspendido del muelle, no se tendrá ahora en cuenta su masa, que por otra parte es pequeña, comparada con la masa de una arandela). (2 puntos)

Prueba experimental
Determinación de *g* y condición de resonancia de un péndulo elástico

RESOLUCIÓN

1) Elevando al cuadrado la ecuación $T_\mathrm{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta l}{g}}$, se obtiene $T_\mathrm{k}^2 = \dfrac{4\pi^2}{g}\Delta l$.

La representación gráfica de T_k^2 frente a Δl es una línea recta de pendiente $\dfrac{4\pi^2}{g}$.

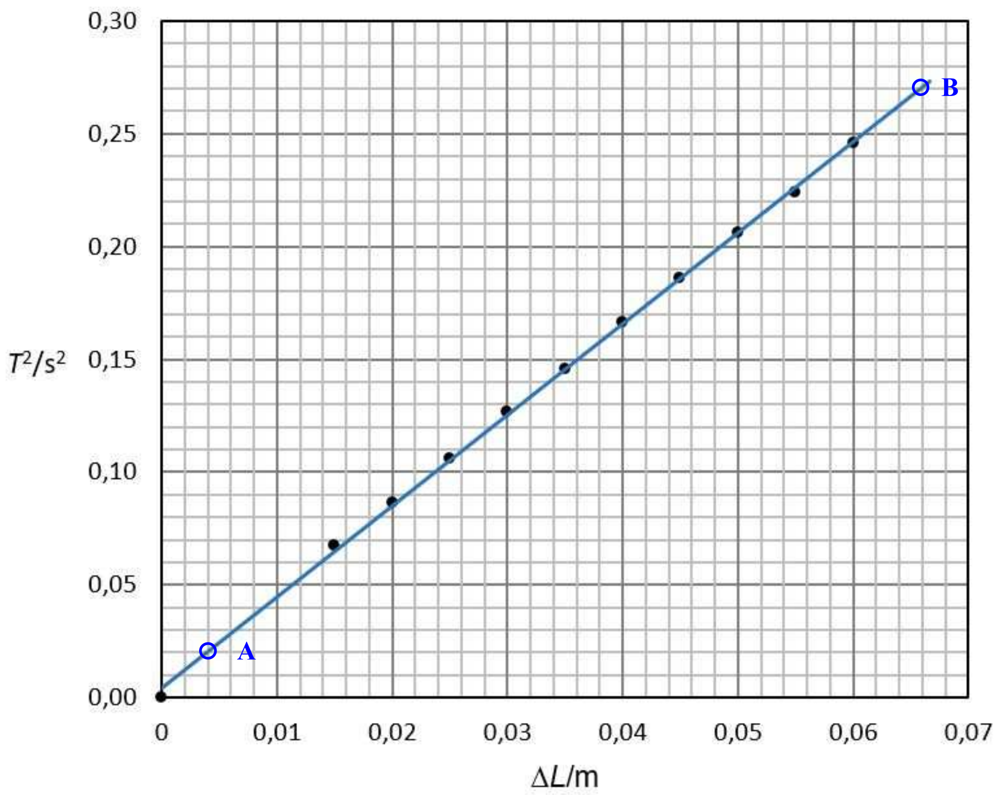
2) La longitud del muelle es l_0 = 5,8 cm = 0,058 m .

3)

Nº de arandelas	t_k / s (20 osc)	T_k / s	l / m	$\Delta l = (l - l_0)$ / m	T_k^2 / s^2	$\Delta l = (l - l_0)$ /m	t_p / s (20 osc)	T_p / s	T_p / T_k
0	-	-	0,058	0,000	-	0,000	-	-	-
3	5,20	0,260	0,073	0,015	0,068	0,015	12,86	0,643	2,47
4	5,87	0,294	0,078	0,020	0,086	0,020	12,90	0,645	2,19
5	6,51	0,326	0,083	0,025	0,106	0,025	13,70	0,685	2,10
6	7,11	0,356	0,088	0,030	0,127	0,030	14,01	0,701	1,97
7	7,63	0,382	0,093	0,035	0,146	0,035	14,23	0,712	1,86
8	8,16	0,408	0,098	0,040	0,166	0,040	14,37	0,719	1,76
9	8,61	0,431	0,103	0,045	0,186	0,045	14,50	0,725	1,68
10	9,07	0,454	0,108	0,050	0,206	0,050	14,69	0,735	1,62
11	9,46	0,473	0,113	0,055	0,224	0,055	14,80	0,740	1,56
12	9,92	0,496	0,118	0,060	0,246	0,060	15,24	0,762	1,54

4) La resonancia se produce con 6 arandelas y para esta situación, L = 12,3 cm.

5)

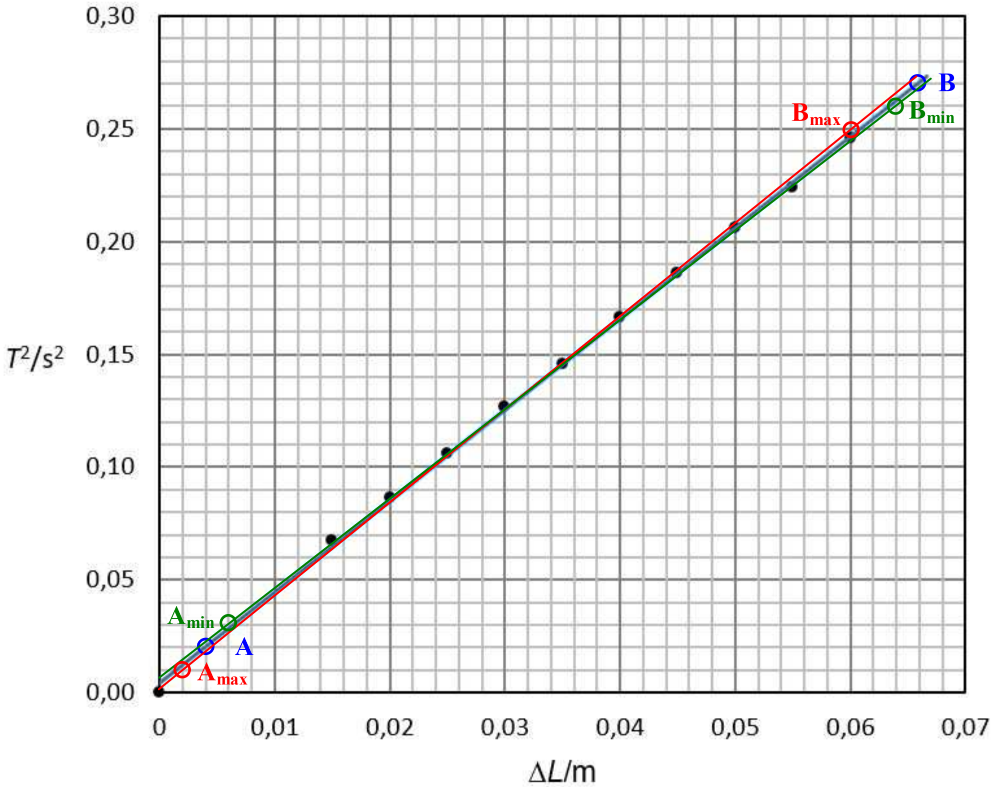


6) Eligiendo dos puntos de la recta, A y B, suficientemente separados, se tiene:

$$\text{pendiente, } p = \frac{T_B^2 - T_A^2}{\Delta l_B - \Delta l_A} = \frac{0{,}27 - 0{,}02}{0{,}066 - 0{,}004}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}} = 4{,}03\ \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

$$p = \frac{4\pi^2}{g};\quad g = \frac{4\pi^2}{p} = \frac{4\pi^2}{4{,}03}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 9{,}80\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

7)



$$p_{\max} = \frac{T_{B_{\max}}^2 - T_{A_{\max}}^2}{\Delta l_{B_{\max}} - \Delta l_{A_{\max}}} = \frac{0{,}25 - 0{,}01}{0{,}060 - 0{,}002}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}} = 4{,}13\ \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

$$p_{\min} = \frac{T_{B_{\min}}^2 - T_{A_{\min}}^2}{\Delta l_{B_{\max}} - \Delta l_{A_{\min}}^2} = \frac{0{,}26 - 0{,}03}{0{,}064 - 0{,}006}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}} = 3{,}97\ \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

$$\Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} = \frac{4{,}13 - 3{,}97}{2}\ \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1} = 0{,}08\ \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

La incertidumbre de g es:

$$\Delta g = g\frac{\Delta p}{p} = 9{,}80 \times \frac{0{,}08}{4{,}03}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = 0{,}19\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

$$g \pm \Delta g = (9{,}80 \pm 0{,}19)\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

8) Como la resonancia se produce con 6 arandelas y, en ese caso, se cumple que:

$$\frac{T_{\mathrm{p}}}{T_{\mathrm{k}}} = 1{,}97$$

el valor buscado es:

$$n = 2$$

9) Teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (4) para la condición de resonancia, se tiene que:

$$\frac{T_p}{T_k} = \frac{\sqrt{L/g}}{\sqrt{m_{\mathrm{res}}/k}} = 2$$

$$\frac{kL}{m_{\mathrm{res}}g} = 4$$

$$k = \frac{4m_{\mathrm{res}}g}{L}$$

Sabiendo que:

$$m_{\mathrm{res}} = 6\times 10{,}2\ \mathrm{g} = 61{,}2\ \mathrm{g}$$

$$g = 9{,}80\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$L = 12{,}3\ \mathrm{cm}$$

el valor de la constante elástica del muelle es:

$$k = \frac{4\times 6{,}12\times 10^{-2}\times 9{,}80}{0{,}123}\cdot\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}} = 19{,}5\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$$