P 2. Electrómetro absoluto de Kelvin

Tres placas metálicas están en el vacío, colocadas como se indica en la figura 1. La placa C es circular de radio *a*; la B posee un orificio circular de radio ligeramente mayor que *a*, y en él esta colocada la placa C. La A, de radio igual al exterior de B, está separada de las anteriores una distancia *d* considerablemente menor que *a*.

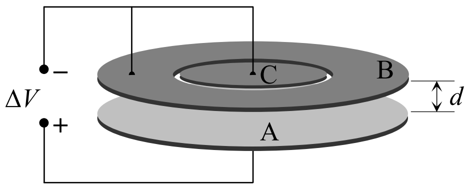

Fig. 1

Cuando las placas se conectan eléctricamente a unos bornes entre los cuales hay una diferencia de potencial ΔV, la placa B, llamada *anillo de guarda*, hace que el campo eléctrico en la región cilíndrica comprendida entre la C y la A sea uniforme.

Tomando como datos la diferencia de potencial ΔV, la distancia *d*, el radio *a* de la placa C y la permitividad eléctrica del vacío ε_0, determine:

a) El módulo, dirección y sentido del campo eléctrico uniforme *E*, en la región comprendida entre las placas C y A.

b) La carga eléctrica en la placa C.

c) El módulo, dirección y sentido de la fuerza que la placa A ejerce sobre la C.

Considérese ahora la figura 2, que es un esquema simplificado del instrumento con el cual Lord Kelvin en 1860, midió por primera vez la fuerza electromotriz de una asociación en serie de pilas Daniell.

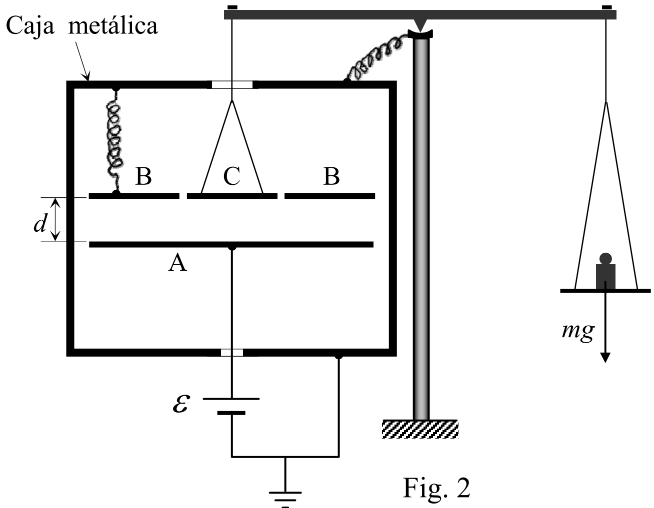

Fig. 2

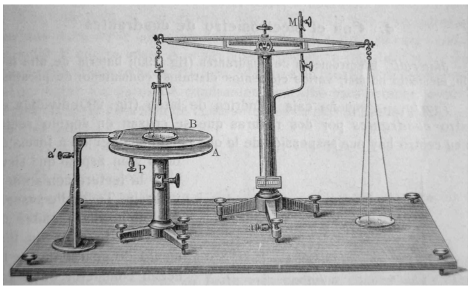

Fig. 3

El aparato consiste en una balanza, cuyo plato izquierdo suspendido por alambres conductores, es un disco metálico que juega el papel de la placa C de la figura 1. Coplanario con el disco C existe un anillo de guarda y a una distancia *d* por debajo se sitúa la placa fija A.

Para aislar al dispositivo de posibles influencias eléctricas externas se coloca dentro de una caja metálica (jaula de Faraday) conectada a tierra. La figura 3, tomada de un libro de Física de los años 30, muestra un electrómetro de este tipo sin la caja metálica.

Con este dispositivo, la batería cuya fem $\mathcal{E}$ se desea medir, se conecta como se indica en la figura 2. Como la placa A ejerce una fuerza sobre la C, para mantener la balanza en equilibrio es preciso añadir pesas en el platillo derecho de la balanza.

d) Si la masa requerida para equilibrar la balanza es $m = 2{,}21 \times 10^{-5}$ kg, empleando los datos que se indican a continuación, determine la fuerza electromotriz de la batería, $\mathcal{E}$.

e) ¿Cuál es el error $\Delta\mathcal{E}$ en la medida de la fem debido a una imprecisión $\Delta m = 0{,}5$ mg en la masa de la pesa?

Datos:

Separación entre las placas: $d = 2{,}00 \times 10^{-3}$ m .

Radio de la placa C: $a = 1{,}00 \times 10^{-1}$ m ;

Pemitividad dieléctrica: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ C^{2}N^{-1}m^{-2} .

Aceleración de la gravedad: $g = 9{,}81$ ms^{-1}

Solución

a) De acuerdo con el enunciado, el anillo de guarda (placa B) asegura que el campo eléctrico sea uniforme en la región comprendida entre la placa C y A. Por lo tanto, limitándonos a dicha región que es la de interés en el problema, la placa C por estar conectada al borne negativo, tendrá una carga negativa -Q, y la inferior, conectada al borne positivo, tendrá la misma carga pero positiva, +Q. Ambas placas, separadas la distancia d, tal como se muestra en la figura 4, tienen una superficie $S = \pi a^2$.

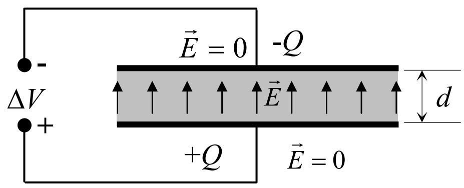

Fig.4

El campo estará dirigido de la placa positiva a la negativa y, dado que el potencial entre las placas es ΔV, su valor será $\Delta V = Ed$, por lo que el módulo del campo es

$$\boxed{E = \frac{\Delta V}{d}} \qquad (1)$$

y la dirección y sentido son las indicadas en la figura.

b) Cada una de las placas, consideradas como planos cargados con densidades de carga superficiales σ y $-\sigma$, crean sus respectivos campos. Su superposición es nula en puntos exteriores al espacio comprendido entre las placas y en los puntos interiores es

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

En efecto, consideremos un punto P perteneciente al espacio entre placas y otros dos, P´ y P´´ exteriores, como se muestra en la figura 5a, y designamos por $\vec{n}$ al vector unitario perpendicular a ambas placas.

En la figuras 5b y 5c se representan los campos que crean individualmente las placas en los puntos señalados y se indican sus valores que pueden ser obtenidos mediante la ley de Gauss (aplicada a una "caja de píldoras" cilíndrica con su eje normal al plano y una base a cada lado). Por último, para obtener el campo total se suman en cada uno de los tres puntos los campos de cada placa. Es decir, se suman los

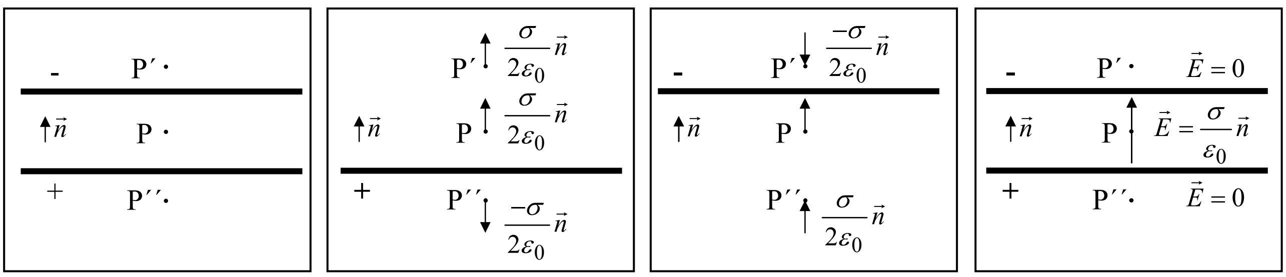

Fig.5a Fig.5b Fig.5c Fig.5d

valores indicados en las figuras 5b y 5c, obteniéndose los indicados en la figura 5d

Se deduce por tanto que el campo total en la región interior es $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$, cuyo módulo es el dado en la expresión (2).

Por otra parte, eliminando E entre (1) y (2) se obtiene la densidad superficial de carga de las placas,

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{\Delta V}{d} \qquad (3)$$

Por lo que la carga de la placa C, teniendo en cuenta que es negativa, será

$$Q = -\sigma \pi a^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = -\varepsilon_0 \pi a^2 \frac{\Delta V}{d}}$$

c) Sobre cada una de las cargas de la placa C (Fig. 1 del enunciado) actúa una fuerza debida al campo eléctrico creado por la placa inferior, cuyo valor indicado en la figura 5b, es

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Como el campo es uniforme y la distribución de carga (negativa) en C también lo es, la fuerza total sobre ella es

$$\vec{F} = -Q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = -\frac{\sigma}{2}\pi a^2 \frac{\Delta V}{d}\vec{n}$$

y teniendo en cuenta (3)

$$\boxed{\vec{F} == -\frac{1}{2}\pi a^2 \varepsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{d}\right)^2 \vec{n}}$$

d) Ahora la diferencia de potencial ΔV es la fuerza electromotriz de la batería, $\mathcal{E}$, que se pretende medir. La fuerza F desequilibra la balanza y para volverla a equilibrar será preciso colocar en el platillo derecho una masa m tal que el momento de su peso sea igual al de la fuerza. Si suponemos que los brazos de dicha balanza son iguales, se tendrá que $F = mg$, de donde resulta,

$$\mathcal{E} = d\sqrt{\frac{2mg}{\pi a^2 \varepsilon_0}} \qquad (4)$$

Sustituyendo los valores numéricos que nos dan,

$$\boxed{\mathcal{E} = 79{,}0\ \mathrm{V}}$$

e) El error $\Delta\mathcal{E}$ debido a una imprecisión Δm de la masa m puede obtenerse de la forma siguiente,

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left| d\sqrt{\frac{2(m+\Delta m)g}{\pi a^2 \varepsilon_0}} - d\sqrt{\frac{2(m-\Delta m)g}{\pi a^2 \varepsilon_0}} \right|$$

Se ha empleado este razonamiento por ser el más utilizado por los estudiantes de Bachillerato. Podría haberse obtenido más directamente por medio de procedimientos habituales de propagación de errores.

Si $\Delta m = 5{,}00\,\mathrm{mg} = 5{,}00\times 10^{-6}\ \mathrm{kg}$, el resultado es

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = 0{,}9\ V}$$