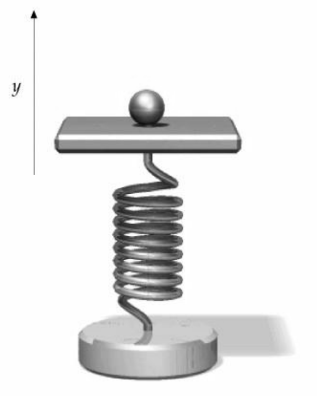
P3. Oscilaciones.

Una pequeña bolita de masa m descansa sobre un plataforma que está oscilando verticalmente con un movimiento armónico simple dado por $y = A \operatorname{sen} \omega t$.



a) Deduzca las expresiones de la fuerza F_b que la plataforma ejerce sobre la bolita en función del tiempo, t, y de la posición, y. A partir de ellas, encuentre la relación que han de guardar los parámetros de este movimiento y la aceleración de la gravedad para que la bolita no se separe de la plataforma.

b) Siendo $\omega^2 A = 2g$ y $A = 15\,\text{cm}$ ¿en qué posición, y_d, e instante, t_d, se despega la bolita de la plataforma?

c) Para la aplicación numérica anterior, represente gráficamente y de forma cualitativa i) la fuerza por unidad de masa, F_b / m, en función de la posición de la plataforma, y; ii), la posición de la bolita y de la plataforma en función del tiempo, en el intervalo $0 \leq t \leq T = 2\pi / \omega$.

Solución

a) Las fuerzas que actúan sobre la bolita son su peso, mg, y la interacción con la plataforma, F_b, ambas verticales y con sentidos opuestos. En virtud de la 2ª ley de Newton

$$F_b - mg = ma$$

De acuerdo con el enunciado, mientras la bolita permanezca sobre la plataforma, su movimiento es oscilatorio armónico, $y = A \operatorname{sen} \omega t$. En consecuencia su aceleración es $a = -\omega^2 y$ y, por tanto, se tiene

$$F_b - mg = -m\omega^2 y = -m\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t$$

De donde, las expresiones de F_b en función de y o el tiempo t son, respectivamente

$$\boxed{F_b = m\left(g - \omega^2 y\right)}, \quad \boxed{F_b = m\left(g - \omega^2 A \operatorname{sen} \omega t\right)}$$

La separación tendrá lugar cuando $F_b = 0$. Como esta fuerza no puede ser negativa, la condición para que la bolita no se despegue es que, en todo instante, se verifique

$$\frac{F_b}{m} > 0 \quad \Rightarrow \quad g > \omega^2 A \operatorname{sen} \omega t$$

Es decir

$$\boxed{\omega^2 y < g} \text{ para todo } y$$

o bien

$$\omega^2 A \, sen \; \omega \, t < g \quad \text{en todo instante}$$

b) Tal como indica el enunciado, $\omega^2 A = 2g$, luego la bolita se tiene que desprender y lo hará para un valor y_d y un instante t_d, que hagan $F_b = 0$, esdecir

$$g = \omega^2 y_d = \omega^2 A \operatorname{sen} \omega t_d$$

Por lo que dichos valores son

$$y_d = \frac{g}{\omega^2} = \frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_d = 7{,}5 \times 10^{-2} \text{ m} = 7{,}5 \text{ cm}}$$

$$\boxed{t_d = \frac{1}{\omega} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_d = 4{,}58 \times 10^{-2} \text{ s} = 45{,}8 \, \text{ms}}$$

c$_i$) La de la fuerza por unidad de masa, F_b / m, depende linealmente de y/A, entre $0 \le y / A \le 0{,}5$. Una vez que se produce el despegue, es nula. La correspondiente grafica es la de la figura 1.

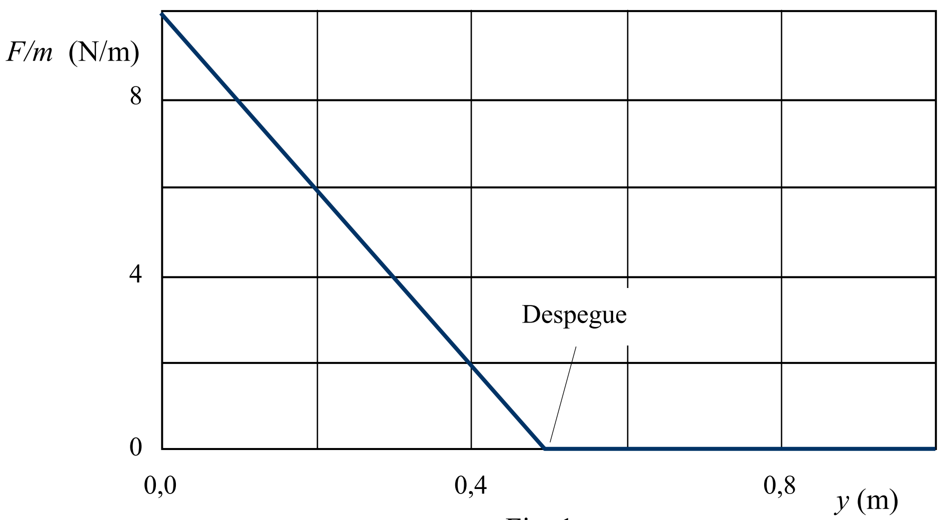


Fig. 1

c_{ii}) La velocidad de la plataforma viene dada por

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \operatorname{sen}\omega t \ \text{ siendo } \ \omega = \left(\frac{2g}{A}\right)^{1/2} = 11{,}4 \text{ rad/s}$$

Luego la velocidad de la bola en el instante t_d en el que se despega será

$$v_d = v(t_d) = A\omega \operatorname{sen}\omega t_d \qquad \Rightarrow \qquad v_d = 1{,}49 \text{ m/s}$$

A partir de ese instante, la bola describirá un movimiento vertical que, despreciando la resistencia del aire, vendrá descrito por

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B \qquad (1)$$

Donde A y B son constantes cuyo valor depende de la posición y velocidad de la bolita en el instante de su despegue.

Una representación del movimiento de la plataforma en función del tiempo se muestra en la figura 2. En esta figura, también se representa el movimiento armónico de dicha plataforma, de periodo $T = 5{,}49 \times 10^{-1}$ s. En el corte de ambas gráficas se produce el “reencuentro” de la bola con la plataforma. Como no se da ninguna información de las características del choque entre ambos, es imposible describir el movimiento posterior de la bolita.

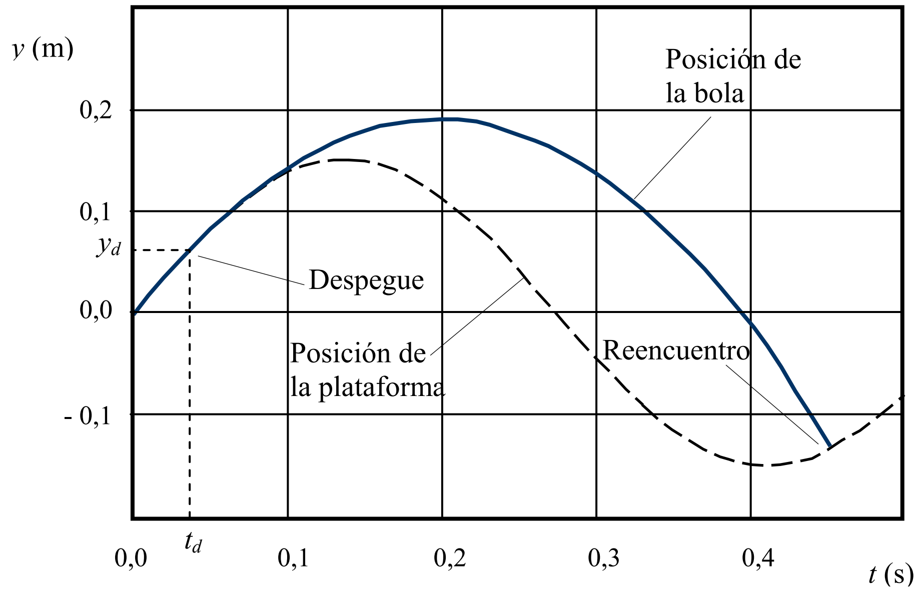


Fig. 2

Nota.

Una descripción detallada del movimiento de la bola (que no exige el enunciado) requiere el cálculo de las constantes A y B de la ecuación (1).

Teniendo en cuenta las condiciones en las que se inicia el movimiento “libre” de la bola, que son

$$y(t_d) = y_d$$
$$v(t_d) = v_d$$

La ecuación del movimiento es

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_d + gt_d)t + y_d + \frac{1}{2}gt_d^2 - (v_d + gt_d)t_d \qquad \Rightarrow$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 1{,}94t - 3{,}30 \times 10 - 3$$