

## P Exp. Campo magnético de un imán y campo magnético terrestre.

### Objetivos

Como bien sabe, el campo gravitatorio creado por una partícula decrece con el cuadrado de la distancia. Pero, ¿sabe con qué potencia de la distancia decrece el campo magnético creado por un imán? En la primera parte de esta prueba se determinará experimentalmente cómo es esta dependencia. En la segunda parte se obtendrá la intensidad del campo magnético terrestre y el momento magnético del imán empleado.

### Materiales

- Cuatro imanes iguales.
- Papel con transportador de ángulos impreso.
- Regla.
- Palillo de madera.
- Cinta adhesiva.
- Tijeras.
- Hilo.
- Cilindro de PVC.
- Barra de PVC.
- Goma de borrar.
- Cronómetro.

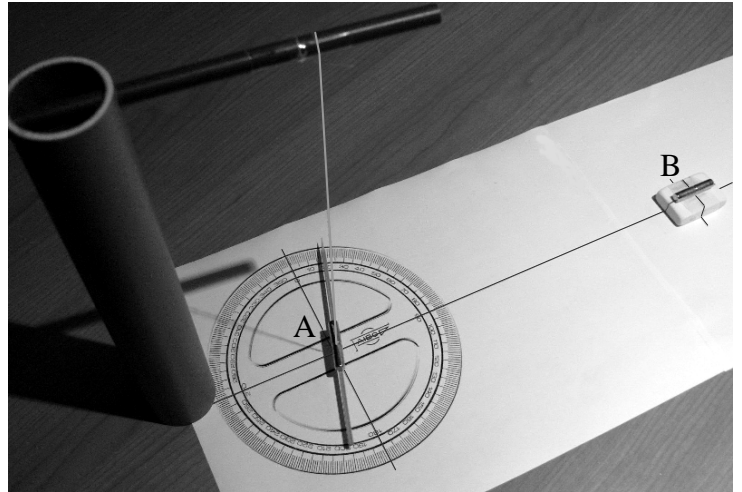


Fig. 1

### Montaje

- a) En primer lugar hay que montar una brújula, que indicará la dirección del campo magnético. Para ello se van a utilizar dos imanes cilíndricos, unidos longitudinalmente y colgados mediante un hilo de un soporte construido con un tubo y una barra de PVC, como se indica en la figura 1. En adelante, llamaremos "A" a esta pareja de imanes.

Sujete el hilo a la barra con un trozo de cinta adhesiva y cuelgue los imanes A en el otro extremo, pellizcando el hilo entre ambos. La altura de la brújula sobre la mesa puede regularse girando la barra de PVC para enrollar o desenrollar hilo.

Para poder medir en el transportador la dirección de la brújula, sujete debajo de los imanes A un palillo largo, cortado a la longitud apropiada y bien alineado con el eje de simetría de los imanes.

- b) Coloque sobre la mesa el papel con el transportador impreso y la brújula con su soporte de modo que:
- La brújula esté lo más alejada posible de la estructura de hierro de la mesa. Aleje también la otra pareja de imanes para que no influyan en la orientación de la brújula.
  - El eje de rotación de la brújula (el hilo) esté exactamente encima del centro del transportador.
  - La dirección N-S marcada por la brújula (dirección del palillo) coincida con la línea 0°-180° del transportador.
  - El palillo quede cerca del transportador, sin llegar a rozarlo.
  - Una vez bien alineado el sistema, es conveniente sujetar sus elementos a la mesa con cinta adhesiva para evitar que se muevan accidentalmente.

- c) Para terminar, una longitudinalmente los otros dos imanes (en adelante pareja "B") y péguelos con cinta adhesiva a la goma de borrar (figura 2), para que su altura sea similar a la de los imanes de la brújula. Para facilitar las medidas posteriores, es conveniente dibujar en la goma unas líneas que se crucen en el punto medio de los imanes, como se muestra en la figura 2.

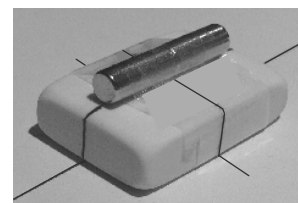


Fig. 2

### Procedimiento experimental

Con el montaje anterior, la brújula está inicialmente orientada en la dirección de la componente horizontal del campo magnético de la Tierra (dirección N – S). Si se sitúan en perpendicular (dirección E – O) la pareja de imanes B, la brújula gira hasta orientarse en la dirección del campo magnético total, suma del terrestre y del producido por los imanes B.

En la primera parte de esta prueba experimental se va a medir la desviación angular de la brújula al acercar gradualmente la pareja de imanes B y, a partir de estas medidas, se determinará cómo decrece con la distancia el campo magnético que crean.

En la segunda parte, se medirá el periodo de las oscilaciones torsionales de la brújula, formada ahora por la pareja de imanes B, en presencia del campo terrestre, y se determinará el valor de dicho campo (de su componente horizontal) y del momento magnético de esta pareja de imanes.

### Primera Parte. Dependencia con la distancia del campo magnético de un imán

El campo magnético producido por un imán cilíndrico en un punto de su eje de simetría lleva la dirección de dicho eje, y su módulo puede expresarse, en puntos alejados frente al tamaño del imán, en la forma

$$B_m = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{r^n}$$

donde  $m$  es el llamado momento magnético del imán, que caracteriza su "potencia",  $r$  es la distancia al centro del imán y  $n$  es un número entero positivo que queremos determinar experimentalmente.

Dato:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$

Con la geometría de nuestro montaje, el campo  $B_m$  producido por la pareja de imanes B, orientados en la dirección E - O, es perpendicular a la componente horizontal del terrestre,  $B_H$ , de forma que la brújula se orienta a un ángulo  $\theta$  con la dirección N – S dado por (véase la figura 3)

$$\text{tg } \theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{B_H r^n} \quad (1)$$

- 1) Mida la desviación angular de la brújula para valores de  $r$  entre 20 cm y 40 cm, a intervalos de 2 cm.

Para evitar errores sistemáticos debidos a pequeños errores de alineación, es conveniente medir las desviaciones angulares en sentidos opuestos,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , obtenidas al orientar los imanes B en un sentido u otro sobre la dirección E – O, de forma que se invierta el sentido de  $B_m$ . Tome como valor para  $\theta$  el promedio de estas dos desviaciones.

Sugerencia: dibuje trazos transversales sobre la línea larga de la cruz impresa en el papel, a las distancias  $r$  en que va a realizar las medidas. Estos trazos son fáciles de alinear con las marcas previamente realizadas en la goma, que marcan el punto medio de la pareja B de imanes.

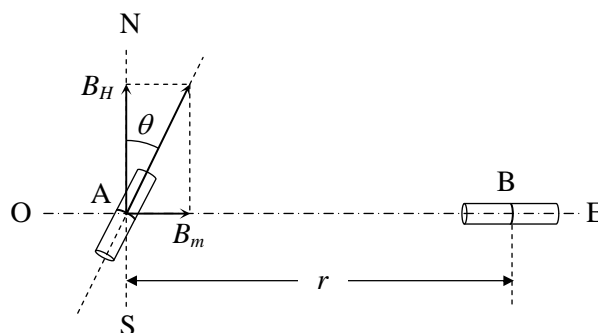


Fig. 3

A partir de estas medidas, construye la siguiente tabla, reservando la última columna para el apartado 5.

$r$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta$	$\text{tg}\theta$	$\ln(\text{tg}\theta)$	$\ln(r)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

- 2) Transforme la ecuación (1) y demuestre que es de esperar una dependencia lineal entre  $\ln(\text{tg}\theta)$  y  $\ln(r)$ .
- 3) Represente gráficamente los puntos experimentales  $\ln(\text{tg}\theta)$ , en ordenadas, frente a  $\ln(r)$ , en abscisas.
- 4) A partir del ajuste a una línea recta de estos puntos, determine el valor de  $n$ . Tenga en cuenta que  $n$  debe ser un número entero, por lo que debe aproximar el valor obtenido al entero más próximo.
- 5) Complete la última columna de la tabla del apartado 1 con los valores de  $1/r^n$ .
- 6) Representa gráficamente los puntos  $\text{tg}\theta$  frente a  $1/r^n$ .
- 7) A partir de la representación anterior, y teniendo en cuenta la ecuación (1), determine el valor de  $m/B_H$ .

### Segunda Parte. Determinación<sup>1</sup> de $B_H$ y de $m$ .

En el apartado anterior se ha determinado el valor del cociente  $m/B_H$ . En esta segunda parte se determinará el valor del producto  $mB_H$  a partir del periodo de oscilación de esta pareja de imanes colgada de un hilo, formando una brújula. Una vez conocidos los valores de  $m/B_H$  y  $mB_H$ , se obtendrán los de  $m$  y  $B_H$ .

En presencia del campo magnético terrestre, nuestra brújula marca en equilibrio la dirección N – S. Si se le da un pequeño impulso angular (en el sentido de retorcer el hilo del que cuelgan los imanes), oscila en torno a la dirección de equilibrio. Este sistema oscilante constituye un *péndulo de torsión*. El par de fuerzas que tiende a llevar la brújula a su orientación de equilibrio se debe a la interacción entre el campo magnético de la Tierra (componente horizontal),  $B_H$ , y el momento magnético de la brújula,  $m$ . Despreciando el pequeño efecto recuperador debido a la torsión del hilo, se demuestra que el periodo  $T$  de pequeñas oscilaciones torsionales de la brújula es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB_H}} \quad (2)$$

donde  $I$  es el *momento de inercia* de la brújula. Esta magnitud representa la inercia de un objeto a cambiar su movimiento de rotación. Depende de la masa del objeto y de su distribución respecto al eje de rotación. Si el cuerpo es un cilindro recto de masa  $M$ , longitud  $L$  y radio  $R$ , que gira respecto a un eje perpendicular al eje principal de simetría por el punto medio (como es nuestro caso), el valor de  $I$  se obtiene en la forma

$$I = MR^2/4 + ML^2/12$$

Emplee como brújula la pareja de imanes B colgada del soporte, como la pareja A en la primera parte pero sin el palillo. Aleje los imanes A para que no influyan en la medida.

- 8) Calcule el momento de inercia de la brújula respecto al eje de rotación indicado,  $I$ . Datos de cada uno de los dos imanes: masa  $M_i = 3,10 \text{ g}$ ,  $L_i = 15,0 \text{ mm}$  y diámetro  $D_i = 6,0 \text{ mm}$ .
- 9) Coloque la brújula en, aproximadamente, la misma posición sobre la mesa que en la primera parte, para que el valor de  $B_H$  no cambie apreciablemente debido a la estructura metálica de la mesa. Gire la brújula respecto a su orientación de equilibrio y suéltela para que realice pequeñas oscilaciones torsionales. Mida

<sup>1</sup> La determinación precisa del campo magnético terrestre requiere hacer el experimento en un lugar alejado de objetos y estructuras de hierro, lo que no es posible en nuestro caso. El valor que se obtenga para  $B_H$  corresponderá al campo magnético local existente en la posición de la brújula.

el periodo,  $T$ , de estas oscilaciones. Describa detalladamente el método de medida que ha empleado.

- 10) Utilice la ecuación (2) para calcular el valor de  $mB_H$ . Combine este resultado con el valor de  $m/B_H$  obtenido en el apartado 7 y calcule los valores de  $m$  y  $B_H$ .
- 11) Haga una estimación de la incertidumbre (margen de error) del valor de  $T$  obtenido en el apartado 9. Teniendo en cuenta sólo esta fuente de error experimental, calcule la incertidumbre de los valores de  $m$  y  $B_H$  obtenidos en el apartado 10.

## Solución

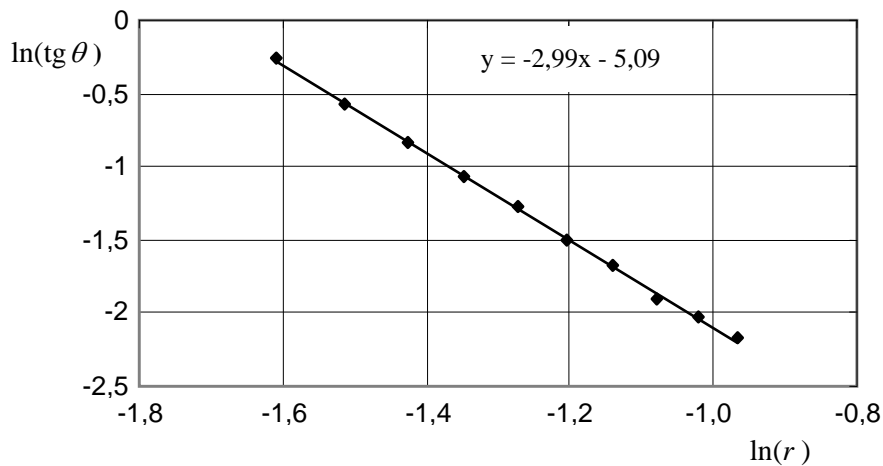
### 1) Medidas y cálculos

Medida	$r$ (m)	$\theta_1$ (°)	$\theta_2$ (°)	$\theta$ (°)	$\text{tg}\theta$	$\ln(\text{tg}\theta)$	$\ln(r)$	$1/r^3$ (m <sup>-3</sup> )
1	0,380	6	7	6,5	0,1139	-2,172	-0,968	18,22
2	0,360	7	8	7,5	0,1317	-2,028	-1,022	21,43
3	0,340	8	9	8,5	0,1495	-1,901	-1,079	25,44
4	0,320	10	11	10,5	0,1853	-1,686	-1,139	30,52
5	0,300	12	13	12,5	0,2217	-1,506	-1,204	37,04
6	0,280	15	16	15,5	0,2773	-1,283	-1,273	45,55
7	0,260	19	19	19,0	0,3443	-1,066	-1,347	56,90
8	0,240	23	24	23,5	0,4348	-0,833	-1,427	72,34
9	0,220	29	30	29,5	0,5658	-0,570	-1,514	93,91
10	0,200	37	38	37,5	0,7673	-0,265	-1,609	125,0

### 2) Tomando logaritmos en la expresión (1) del enunciado, se obtiene

$$\ln(\text{tg}\theta) = \ln\left(\frac{\mu_0 m}{2\pi B_H}\right) - n\ln(r) \quad (2)$$

### 3) Gráfica de $\ln(\text{tg}\theta)$ frente a $\ln(r)$ .

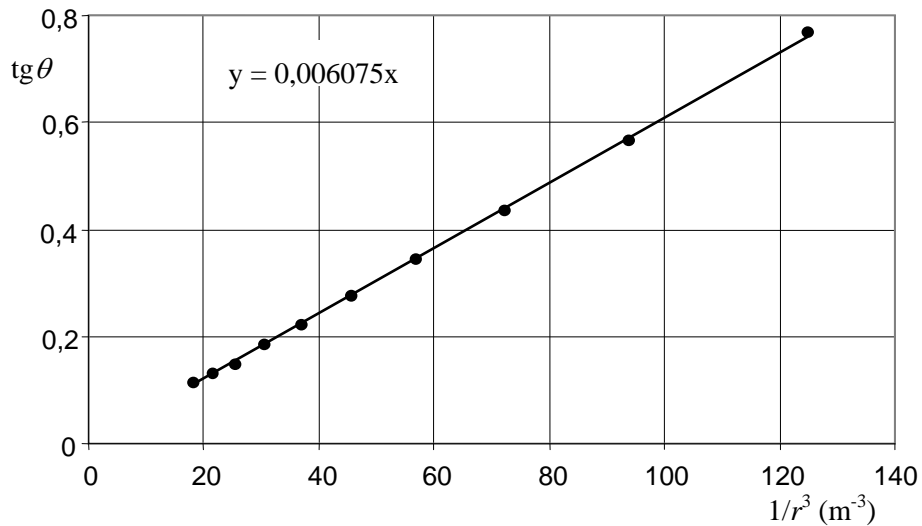


### 4) Se obtiene $n = 2,99$ . Por tanto

$$n = 3.$$

### 5) Los valores de $1/r^3$ se presentan en la última columna de la tabla del apartado 1.

### 6) Gráfica de $\text{tg}\theta$ frente a $1/r^3$ .



7) Según (1), la pendiente de esta gráfica es

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{B_H} = 6,08 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

de donde

$$\frac{m}{B_m} = 3,04 \times 10^4 \text{ A}^2 \text{ m}^3 \text{ N}^{-1} \quad (3)$$

8) Momento de inercia.

Para  $M = 6,20 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ,  $L = 30,0 \times 10^{-3} \text{ m}$  y  $R = 3,0 \times 10^{-3} \text{ m}$ , resulta

$$I = (0,14 + 4,65) \times 10^{-7} \text{ kg m}^2 \Rightarrow I = 4,79 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2$$

9) Medida del periodo de oscilación de la brújula.

Nº oscilaciones	10	10	10	10	10	10
Tiempo (s)	9,40	9,39	9,76	9,62	9,29	9,54
Periodo, $T$ (s)	0,940	0,939	0,976	0,962	0,929	0,954

$$10) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB_H}} \Rightarrow mB_H = 4\pi^2 \frac{I}{T^2} \Rightarrow \boxed{\bar{T} = 0,950 \text{ s}} \quad (4)$$

$$\Rightarrow mB_H = 2,10 \times 10^{-5} \text{ N m} \quad (5)$$

La resolución del sistema de ecuaciones formado por (3) y (5) conduce a

$$\boxed{\begin{aligned} B_H &= 2,63 \times 10^{-5} \text{ T} \\ m &= 0,798 \text{ A m}^2 \end{aligned}}$$

11) Precisión de los resultados:

El error típico del periodo de oscilación, determinado en el apartado 9 como promedio de seis medidas, es

$$\Delta T = \sqrt{\frac{\sum (\bar{T} - T_i)^2}{6 \times 5}} = 0,007 \text{ s}$$

El número de medidas no es muy elevado, por lo que una estimación razonable de la incertidumbre del periodo obtenido podría ser<sup>2</sup>

$$\boxed{\Delta T = 0,01 \text{ s}}$$

Para calcular los errores transmitidos a los valores de  $m$  y  $B_H$  es conveniente obtener la dependencia explícita de ambos con el periodo de oscilación. A partir de (4) y del valor numérico de  $m/B_H \equiv k$ , dado en (3), se obtiene

$$B_H = 2\pi \frac{1}{T} \sqrt{\frac{I}{k}}$$

$$m = 2\pi \frac{1}{T} \sqrt{kI}$$

Las incertidumbres transmitidas a  $m$  y  $B_H$  pueden calcularse en la forma

$$\Delta B_H = \left| \frac{\partial B_H}{\partial T} \right| \Delta T = \frac{2\pi}{T^2} \sqrt{\frac{I}{k}} \Delta T = \frac{B_H}{T} \Delta T = 3 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$\Delta m = \left| \frac{\partial m}{\partial T} \right| \Delta T = \frac{2\pi}{T^2} \sqrt{kI} \Delta T = \frac{m}{T} \Delta T = 8 \times 10^{-7} \text{ A m}^2$$

Estos márgenes de error también pueden calcularse de una forma directa evaluando  $B_H$  y  $m$  para los valores extremos de  $T$ , dentro del intervalo de incertidumbre estimado

$$\Delta B_H = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} \left( \frac{1}{T - \Delta T} - \frac{1}{T + \Delta T} \right) = 3 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$\Delta m = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{kI} \left( \frac{1}{T - \Delta T} - \frac{1}{T + \Delta T} \right) = 8 \times 10^{-7} \text{ A m}^2$$

Los resultados finales para  $B_H$  y  $m$  son, con incertidumbres transmitidas<sup>3</sup>

$$\boxed{B_H = (2,63 \pm 0,03) \times 10^{-5} \text{ T}}$$

$$\boxed{m = (0,798 \pm 0,008) \text{ A m}^2}$$

Notas:

El valor del exponente  $n = 3$  puede considerarse libre de error, ya que es entero.

El error típico relativo de la pendiente de la gráfica en el apartado 6, que permite determinar  $m/B_H$ , es del orden del 0,3%. Por tanto, para el conjunto de medidas que se presentan, la influencia de esta fuente de error en el resultado final es prácticamente despreciable frente a la del periodo de oscilación.

<sup>2</sup> Un cálculo estadístico más exacto conduce a que, con un nivel de confianza del 95%,  $\Delta T = 0,018 \text{ s}$ .

<sup>3</sup> En ambos casos, las incertidumbres relativas son del orden del 1%. Esto era de esperar pues el error relativo de  $T$  es de este mismo orden, y tanto  $B_H$  como  $m$  son inversamente proporcionales a  $T$ .