

P1. Anemometría sónica.

Hoy en día, los Centros Meteorológicos disponen de aparatos muy sofisticados para medir la velocidad del viento que, además y simultáneamente, miden la temperatura del aire. El ejercicio que se propone hace referencia a uno de estos aparatos, el *anemómetro sónico*, que a diferencia de los convencionales carece de partes móviles como son las cazoletas giratorias, veleta, etc. El funcionamiento de este tipo de anemómetro se basa en la medida de tiempos de propagación de señales sonoras.

Como introducción, y para facilitar la resolución del ejercicio, se propone en primer lugar el conocido problema del movimiento de una canoa en un río.

Una canoa que navega a una velocidad constante c respecto al agua, realiza una trayectoria rectilínea desde un punto A hasta otro B separados una distancia L y después, realiza el trayecto inverso de B hasta A. Los tiempos que tarda en hacer los recorridos son t'_1 y t'_2 respectivamente, siendo $t'_2 > t'_1$ porque existe una corriente de velocidad \vec{v}_a que tiene la dirección de A a B, tal como se muestra en la figura 1.

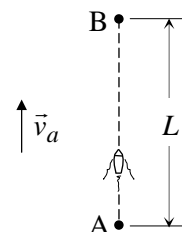


Fig. 1

- a) Deduzca las expresiones analíticas que permitan calcular c y v_a (módulo de \vec{v}_a) en función de t'_1 y de t'_2 y de la distancia L .

Suponga ahora, y en todo lo que sigue, que la canoa es una señal sonora que se propaga en el aire con una velocidad c y que la velocidad \vec{V}_a es la del viento.

- b) Si la velocidad de propagación del sonido es $c = 3,44 \times 10^2$ m/s y la del viento es $V_a = 100,0$ km/h, calcule los tiempos t'_1 y t'_2 tomando $L = 20,0$ cm

Considere que el viento “no sopla” en la dirección AB sino que lo hace de forma que \vec{v}_a tiene dos componentes, v_N y v_L , perpendicular y paralela a AB, respectivamente, tal como se indica en la figura 2.

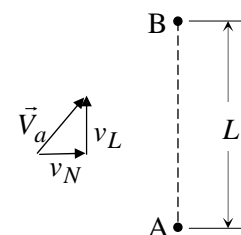


Fig. 2

- c) Como sólo se puede determinar la componente longitudinal de la velocidad del viento, deduzca la expresión de v_L en función de la distancia L y de los tiempos t_1 y t_2 que transcurren, respectivamente, desde que la señal sonora es emitida en A y detectada en B y viceversa.

- d) Teniendo en cuenta que $c \gg v_a$, deduzca la expresión de la velocidad del sonido, c , en función de L , t_1 y t_2 .

La velocidad de propagación del sonido en el aire, c , depende de la densidad del aire ρ y de su módulo de compresibilidad B , según la expresión:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

En la propagación de una onda sonora, cada elemento de volumen del aire, V , experimenta variaciones periódicas de la presión, Δp , que dan lugar a variaciones, ΔV , de su volumen. El módulo de compresibilidad representa el factor de proporcionalidad entre dichas variaciones, es decir, se define como

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$$

Ahora bien, la relación $\Delta V / \Delta p$ depende del tipo de transformación termodinámica que experimente el gas (aire) contenido en el elemento de volumen.

Dada la baja conductividad térmica de los gases y la rapidez con que se producen las variaciones de presión y de volumen, estos procesos deben considerarse adiabáticos. En consecuencia, el modelo adiabático de propagación del sonido es el más indicado para aire seco, por lo que, si γ es el índice adiabático del aire, se tiene

$$V\Delta p + \gamma p\Delta V = 0$$

- e) Considerando que el aire, de masa molecular media M_a , se comporta como un gas perfecto, obtén la expresión de c en función de la temperatura T del aire.
- f) ¿A qué temperatura la velocidad del viento tendrá el valor indicado en el apartado b)?

$$R = 8,315 \text{ J/(K mol)} \quad M_a = 28,8 \times 10^{-3} \text{ kg/mol} \quad \gamma = 1,40$$

Nota:

El problema propuesto constituye el fundamento de los anemómetros sónicos, ampliamente usados en la actualidad y descritos por V. E. Suomi y J. A. Businger (Geophys. Research Papers No 59, Vol. III, 1, 1959).

Puesto que sólo se puede determinar la componente longitudinal de la velocidad del viento, v_L , en función de los tiempos de vuelo de la señal, es necesario disponer de tres dispositivos análogos que midan dicha componente en tres direcciones no coplanarias para que la velocidad del viento quede completamente determinada, como se puede apreciar en la fotografía de la figura 3.

La dirección del viento puede medirse con una exactitud de $\pm 1^\circ$ y su velocidad con $\pm 1\%$ en el rango de 0 a 215 km/h. Asimismo, miden la velocidad del sonido con la misma exactitud en el rango de 300 a 380 m/s.

Dada la dependencia de la velocidad del sonido con la temperatura, estos anemómetros permiten medirla con una exactitud de $\pm 1\%$ en el rango comprendido entre -30°C y 50°C .



Fig. 3

Solución

- a) Consideremos dos sistemas de referencia, uno fijo ligado a los puntos A y B y otro ligado al agua que se mueve respecto al primero con velocidad \vec{v}_a . Las velocidades de la barca en ambos sistemas de referencia están relacionadas por:

$$\vec{v}' = \vec{c} + \vec{v}_a \quad (1)$$

Si llamamos \vec{v}'_1 y \vec{v}'_2 a las velocidades con las que se mueve la barca respecto al primer sistema en los recorridos citados, y dado que todos los vectores velocidad tienen la misma dirección, sus módulos verifican

$$v'_1 = c + v_a$$

$$v'_2 = c - v_a$$

Por otra parte, $v'_1 = L/t'_1$ y $v'_2 = L/t'_2$, luego

$$t'_1 = \frac{L}{c + v_a} \quad t'_2 = \frac{L}{c - v_a} \quad (2)$$

Lógicamente, $t'_2 > t'_1$. Sumando y restando las expresiones (2) se obtienen las relaciones buscadas

$$\boxed{v_a = \frac{L}{2} \frac{t'_2 - t'_1}{t'_1 t'_2}} \quad \boxed{c = \frac{L}{2} \frac{t'_2 + t'_1}{t'_1 t'_2}}$$

- b) Con los datos del enunciado, de (1) se obtiene:

$$\boxed{t'_1 = 5,38 \times 10^{-4} \text{ s} = 0,538 \text{ ms}}$$

$$\boxed{t'_2 = 6,33 \times 10^{-4} \text{ s} = 0,633 \text{ ms}}$$

- c) La relación entre las velocidades es la dada en (1) pero ahora los vectores tienen direcciones diferentes. En los trayectos AB y BA, los correspondientes diagramas de velocidades son los dados en la figura 5.

Las direcciones de las velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son la de AB, deberá cumplirse que

$$v_N = c \sin \beta_1 = c \sin \beta_2 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta$$

Por otra parte, de los diagramas de la figura 5, se deduce

$$v_1 = c \cos \beta + v_L$$

$$v_2 = c \cos \beta - v_L \quad (3)$$

siendo $v_1 = L/t_1$ y $v_2 = L/t_2$

sustituyendo estas últimas expresiones en (3) y restando ambas ecuaciones se obtiene inmediatamente v_L en función de los tiempos de ida y de vuelta de la señal

$$\boxed{v_L = \frac{L}{2} \left(\frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} \right)}$$

- d) Si sumamos las expresiones (3), con las velocidades de la señal en función de los tiempos de vuelo, resulta

$$c \cos \beta = \frac{L}{2} \left(\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} \right) \quad (5)$$

Como el ángulo β es desconocido, para poder eliminarlo, el teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos rectángulos de la figura 5, nos proporciona la siguiente ecuación

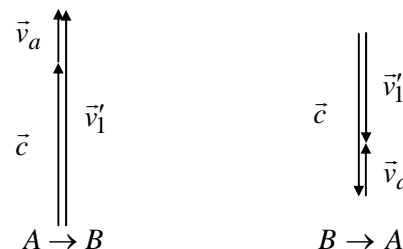
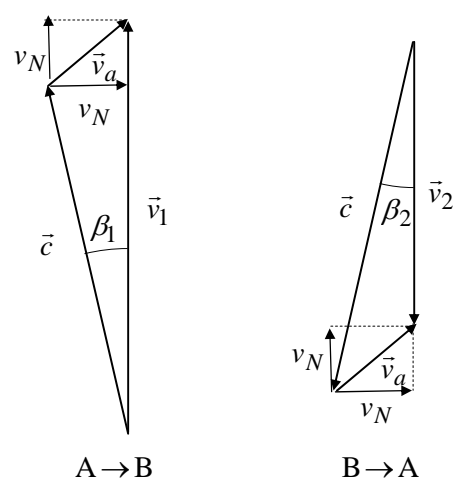


Fig. 4



(4) Fig. 5

$$c^2 \cos^2 \beta = c^2 - v_N^2 \quad (6)$$

Sustituyendo en (5)

$$c^2 - v_N^2 = \frac{L^2}{4} \left(\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} \right)^2$$

Ya que $c \gg v_a$, también $c \gg v_N$ por lo que

$$c^2 \approx \frac{L^2}{4} \left(\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} \right)^2 \Rightarrow \boxed{c \approx \frac{L}{2} \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}} \quad (7)$$

d') Otra forma de determinar c .

Del diagrama $A \rightarrow B$ de la figura 5 se deduce que

$$v_1 = c \cos \beta + v_L \Rightarrow c \cos \beta = v_1 - v_L$$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta (6)

$$c^2 - v_N^2 = v_1^2 + v_L^2 - 2v_L v_1 \Rightarrow c^2 = v_1^2 + v_L^2 + v_N^2 - 2v_L v_1$$

Pero, $v_L^2 + v_N^2 = v_a^2$ y como $c \gg v_a$, se puede escribir, recordando que $v_1 = L/t_1$

$$c^2 \approx \frac{L^2}{t_1^2} - 2 \frac{L}{t_1} v_L$$

Sustituyendo el valor de v_L de la expresión (4), se deduce que

$$\boxed{c \approx \frac{L}{\sqrt{t_1 t_2}}} \quad (8)$$

Nota:

Las expresiones (7) y (8) son, a primera vista, muy diferentes pero ambas válidas. En efecto la ecuación (7) puede expresarse así en función del cociente entre de las medias aritmética y geométrica de t_1 y t_2

$$c \approx L \frac{(t_1 + t_2)/2}{\sqrt{t_1 t_2}} \frac{1}{\sqrt{t_1 t_2}}$$

Como ambas medias son prácticamente coincidentes cuando, como es el caso que nos ocupa, $t_1 \approx t_2$, resulta que

$$c \approx L \frac{1}{\sqrt{t_1 t_2}}$$

que coincide con la expresión (8).

De (7) y (8) se llega también a

$$\boxed{c \approx \frac{2L}{t_1 + t_2}}$$

Dado que $t_1 \approx t_2$, puede deducirse esta expresión de forma independiente sin más que escribir que

$$c \approx \frac{L}{\bar{t}}$$

donde \bar{t} es el tiempo medio de ida y vuelta de la señal sonora

- e) En virtud de la información que aporta el enunciado de este apartado, la velocidad del sonido puede escribirse como

$$c = \sqrt{-\frac{V \Delta p}{\rho \Delta V}} \quad (9)$$

Naturalmente, un aumento de presión ($\Delta p > 0$) implica una disminución del volumen ($\Delta V < 0$) y viceversa, es decir, la relación $\Delta p / \Delta V$ tiene que ser necesariamente negativa, cualquiera que sea la transformación termodinámica que sufra el elemento de volumen.

En este caso, y de nuevo tal como sugiere el enunciado para aire seco, el modelo de transformación más indicado es el adiabático en el que se verifica que

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{\gamma p}{V}$$

Sustituyendo en (9)

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (10)$$

Asumiendo que el aire se comporta como un gas perfecto, llamando M a la masa de aire encerrado en el volumen V y T a su temperatura absoluta, se tiene que

$$pV = nRT = \frac{M}{M_a} RT \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M_a}$$

Sustituyendo en (10) se obtiene la expresión de la velocidad de propagación del sonido en el aire, en función de la temperatura

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R}{M_a} T} \quad (11)$$

- f) La velocidad del sonido indicada en el apartado (b) es $c = 3,44 \times 10^2$ m/s. La temperatura correspondiente, de acuerdo con (11), vendrá dada por

$$T = \frac{c^2 M_a}{\gamma R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2,93 \times 10^2 \text{ K}}$$