

## P2. La rueda hidráulica.

La rueda hidráulica es uno de los más antiguos artilugios para producir trabajo útil. Como antecedentes de las modernas turbinas, estos dispositivos captan energía de una corriente de agua y la transforman en trabajo mecánico para mover molinos, batanes, martillos pilones en las ferrerías, etc, y para bombear agua, como es el caso de las norias, objeto de este ejercicio.

En España han existido infinidad de norias y algunas todavía subsisten, como ejemplo verdaderamente notable es la de Abarán (Murcia). En el río Ebro, una noria da nombre a un antiguo monasterio cisterciense: el Monasterio de Rueda. Con motivo de la celebración en España de la Exposición Internacional de 2008 que tendrá lugar en Zaragoza y para hacer honor a su lema: el agua, se instalará una noria de gran tamaño y enteramente de madera, construida en Siria donde son famosas las existentes en Hama, en el río Orantes, que datan del siglo XII y aún permanecen en funcionamiento.

Una noria hidráulica destinada a la elevación de agua es esencialmente una rueda con paletas (álabes), colocada con su eje horizontal, como se muestra en la figura 1. La corriente de un río, acequia o canal ejerce una fuerza sobre los álabes sumergidos de su parte inferior que producen la rotación de la rueda. En el perímetro de la rueda se disponen unos pequeños recipientes (cangilones o arcaduces) que se llenan de agua al estar sumergidos y cuando, debido al giro de la rueda, alcanzan la parte superior vierten su contenido en un canal. De esta forma elevan agua a una altura aproximadamente igual al diámetro de la rueda.

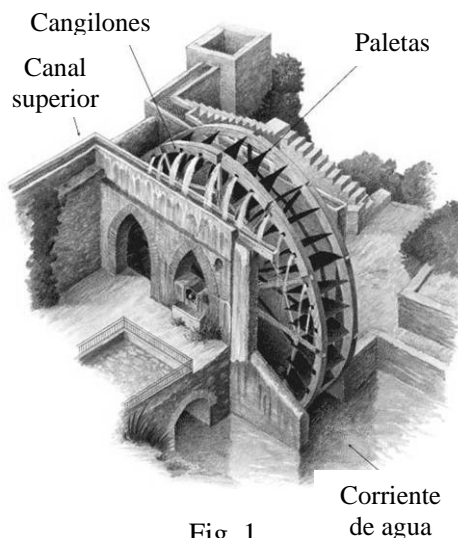


Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3

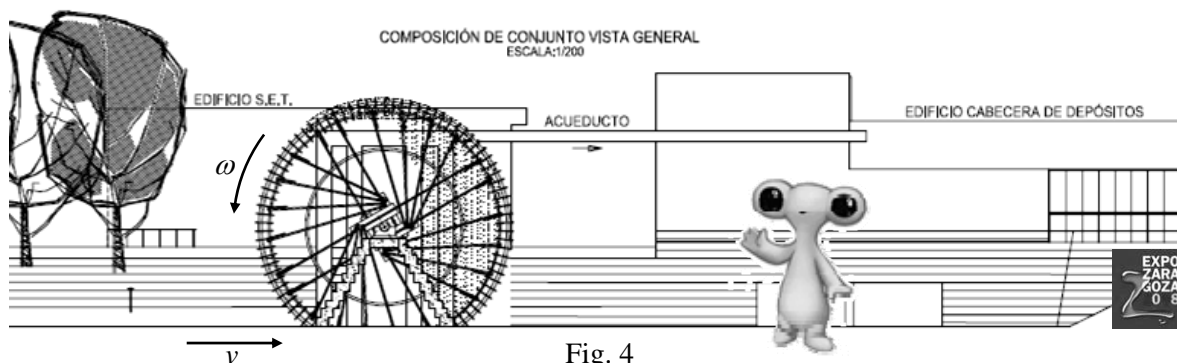


Fig. 4

Una reproducción de una noria romana, con cangilones de barro en forma de cántaros, se encuentra en el parque de María Cristina de Algeciras (figura 2) y en la fotografía de la figura 3 aparecen unas norias de Hama; la mayor es la que está siendo reproducida en la EXPO2008 y que en la figura 4, está representada esquemáticamente y a escala. (Foto y esquema, cortesía de EUROTEC, empresa encargada de su proyecto y construcción)

En la noria representada en la figura 4, objeto de este ejercicio, el agua de la acequia que se mueve con una velocidad media  $v$ , “choca” con el álabe plano, de área  $A$ , que se encuentra en su parte inferior y que se desplaza con una velocidad constante  $u$  ( $u < v$ ).

Responde a las siguientes cuestiones suponiendo que la noria se comporta como un mecanismo ideal, sin tener en cuenta ningún tipo de pérdidas energéticas.

Si llamamos  $\Delta t$  al tiempo que dura el choque, la cantidad de agua  $\Delta m$  que golpea al álabe es la contenida en el elemento de volumen  $A\Delta x$ , como se muestra en la figura 5a. Como consecuencia de este proceso, la masa  $\Delta m$  pasa a tener una velocidad horizontal  $u$ , igual a la del álabe (figura 5b).

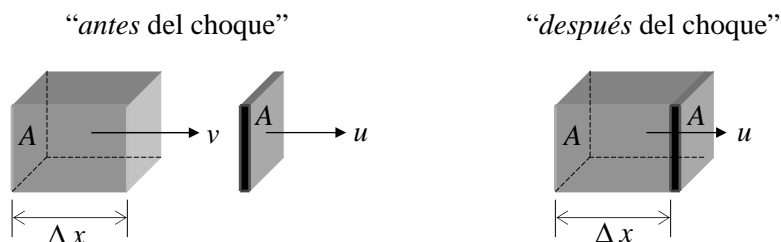


Fig. 5 b

- 1) Como aplicación del *teorema del impulso y de la cantidad de movimiento*, deduzca la expresión de la fuerza  $\Delta F$  que el agua ejerce sobre el álabe en función de las velocidades  $u$  y  $v$ , del área  $A$  y de la densidad del agua  $\rho$ .
- 2) Determina el trabajo  $\Delta W$  que realiza la fuerza  $\Delta F$  sobre el álabe en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ .
- 3) Determina el rendimiento del proceso, definido como  $\eta = \Delta W / \Delta E_c$ , en donde  $\Delta E_c$  es la energía cinética de la masa  $\Delta m$  contenida en el elemento de volumen  $A\Delta x$ , que es la máxima energía que se puede transferir del agua al álabe.
- 4) El rendimiento anterior depende de la velocidad  $u$  del álabe. Determina el valor  $u_0$  de la velocidad del álabe para la cual dicho rendimiento es máximo. ¿Cuál es el valor del máximo rendimiento?
- 5) Si el radio de la noria es  $R$ , ¿con qué velocidad angular  $\omega_0$  debe girar para que el rendimiento sea máximo?

La noria que se va a construir para la Expo2008, tiene un diámetro  $2R = 16,5\text{ m}$ , la superficie efectiva de sus álabes planos es  $A = 0,5\text{ m}^2$  y se pretende elevar un caudal de agua  $G = 1,5 \times 10^{-2}\text{ m}^3/\text{s}$ .

- 6) Determina la expresión analítica de la velocidad media de la corriente de agua,  $v$ , que provoca el giro de la noria, en condiciones de rendimiento máximo, y calcula su valor. Toma como valor de la aceleración de la gravedad:  $g = 9,8\text{ m/s}^2$ .

## Solución

- 1° La variación de la componente horizontal del momento lineal de la masa  $\Delta m$  contenida en el elemento de volumen  $A \Delta x$ , durante el choque con el álabe es igual al impulso que éste ejerce sobre dicho elemento de volumen:

$$\Delta F' \Delta t = \Delta m(u - v)$$

Como  $\Delta m = \rho A \Delta x$  y, en virtud del principio de acción y reacción, la fuerza  $\Delta F$  que el agua ejerce sobre el álabe es igual a  $-\Delta F'$ , se tiene

$$\Delta F \Delta t = \rho A \Delta x(v - u)$$

Además, como  $\Delta x = v \Delta t$  se obtiene

$$\boxed{\Delta F = \rho A v(v - u)}$$

- 2° El trabajo  $\Delta W$  que  $\Delta F$  realiza sobre el álabe en el tiempo  $\Delta t$  es

$$\Delta W = \Delta F \Delta x'$$

Como  $\Delta x' = u \Delta t$  es la distancia recorrida por el álabe en el tiempo que dura el choque, el trabajo viene dado por

$$\boxed{\Delta W = \rho A u v(v - u) \Delta t}$$

- 3° Para el cálculo del rendimiento es necesario determinar la energía cinética de la masa  $\Delta m$ . Esta energía es

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho A v \Delta t v^2 = \frac{1}{2} \rho A \Delta t v^3$$

Por lo que el rendimiento es

$$\boxed{\eta = \frac{2u(v-u)}{v^2}}$$

- 4° El rendimiento será máximo para el valor  $u = u_0$  que haga

$$\frac{d\eta}{du} = 0 \Rightarrow v - 2u_0 = 0$$

Con lo que

$$\boxed{u_0 = \frac{1}{2} v} \quad \text{y} \quad \boxed{\eta = 0,5}$$

- 5° La velocidad angular de la noria es  $\omega = u/R$ . Si el rendimiento ha de ser el máximo, la velocidad angular deberá ser

$$\boxed{\omega_0 = \frac{v}{2R}}$$

- 6° La energía disponible es el trabajo realizado sobre el álabe en condiciones de rendimiento máximo,  $u_0 = v/2$

$$\Delta W_{u=u_0} = \frac{1}{4} \rho A v^3 \Delta t$$

Para elevar una masa de agua  $\Delta M$  a una altura  $h = 2R$  es necesario consumir una energía

$$\Delta E = \Delta M 2R g$$

que podemos poner en función del caudal  $G$  recordando que  $\Delta M = \rho G \Delta t$ , con lo que

$$\Delta E = \Delta M 2 R g = \rho G 2 R g \Delta t$$

Igualando la energía disponible con la consumida (balance energético) se tiene

$$\frac{1}{4} \rho A v^3 \Delta t = \rho G 2 R g \Delta t$$

Que nos permite obtener la velocidad de la corriente de agua que provoca el giro de la noria en rendimiento máximo en función del caudal de agua elevada

$$v = \left( \frac{8 R g G}{A} \right)^{1/3}$$

Sustituyendo los valores dados en el enunciado, se obtiene el siguiente valor

$$v = 2,7 \text{ m/s} = 9,6 \text{ km/h}$$