

## Prueba experimental. Oscilaciones amortiguadas de un péndulo de agua.

### Objetivos

Se van a estudiar experimentalmente las oscilaciones de la columna de agua contenida en un tubo cilíndrico, doblado en forma de U. Debido a la fricción del agua con las paredes del tubo, esta oscilación es amortiguada y al cabo de unas pocas oscilaciones se alcanza el equilibrio. En concreto, se van a determinar experimentalmente el *radio efectivo* del tubo y el *coeficiente de amortiguamiento*.

### Materiales

- Tubo de goma de 170 cm de longitud.
- Listón de madera.
- Sargentos y tacos de madera para sujetar el listón a la pata de la mesa.
- 4 pinzas para sujetar el tubo al listón.
- Cinta adhesiva y tijeras.
- Jeringa graduada de 60 cm<sup>3</sup>.
- Cinta métrica.
- Cronómetro.
- Botella de agua.
- Vaso de plástico.

### Montaje; procedimiento experimental

- El listón de madera se coloca vertical, apoyado en el suelo y en el lateral de la mesa. Se colocan los tacos de madera entre el listón y la pata de la mesa y se sujetan con los sargentos, como indica la figura 1.
- El tubo se sujeta al listón mediante las pinzas, como se indica en la figura 2. Si es necesario, se puede emplear cinta adhesiva para terminar de sujetar el tubo y darle la forma deseada en U.
- Debe procurarse que el tubo mantenga su sección circular, es decir que no se doble en la parte inferior curvada ni se aplaste con las pinzas. Además, los dos laterales del tubo deben quedar verticales.
- Es necesario que quede un trozo de tubo libre en la parte superior de los dos lados, uno de ellos suficientemente largo para poder soplar por él.
- El volumen deseado de agua se introduce en el tubo mediante una jeringa graduada. Deben evitarse en lo posible las burbujas de aire dentro de la jeringa y en la columna de agua dentro del tubo.
- Para forzar la oscilación de la columna de agua, soplar por un extremo del tubo hasta que el agua alcance el nivel deseado y tapan con un dedo el otro extremo. Al quitar el dedo que cierra el tubo comienza la oscilación de la columna de agua. El desplazamiento inicial del agua debe ser suficiente para que puedan observarse cuatro oscilaciones completas antes de que el sistema alcance el equilibrio.
- **Atención:** cuando se sopla por un extremo del tubo, debe evitarse que el agua rebose por el otro. Si ocurriese esto, sería necesario vaciar el tubo y volver a empezar la medida pues se desconocería el volumen de agua que queda dentro del tubo.
- Antes de realizar medidas es conveniente adquirir práctica con el método de forzar la oscilación del agua y con el manejo del cronómetro.

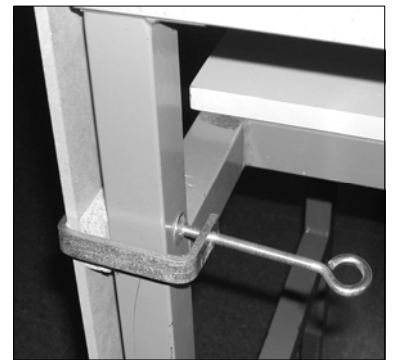


Fig. 1

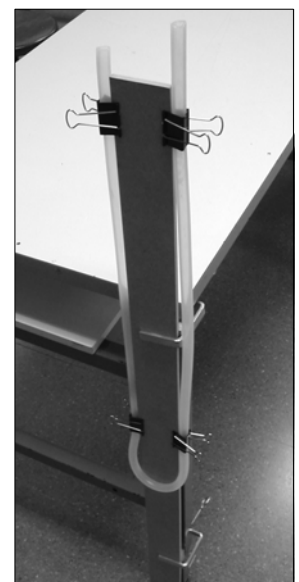


Fig. 2

## Modelo teórico

En equilibrio, el nivel de agua en los dos lados del tubo es el mismo (figura 3.a). Cuando se sopla por un extremo del tubo el sistema se desequilibra (figura 3.b) y, al liberar el sistema, el nivel  $x$  del agua oscila en torno al de equilibrio. No es difícil demostrar que, en ausencia de fricción, esta oscilación es armónica, es decir

$$x = A \cos \omega_0 t \quad (1)$$

con periodo de oscilación  $T_0 = 2\pi / \omega_0$  dado por

$$T_0^2 = \frac{2\pi}{gR^2} V \quad (2)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $R$  el radio del tubo y  $V$  el volumen de agua.

En ausencia de fricción, la amplitud de oscilación,  $A$ , sería constante en el tiempo. Un tratamiento más realista debe tener en cuenta la fricción del agua con las paredes del tubo. Si se considera una fuerza de fricción proporcional a la velocidad del agua, se obtiene

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t \quad (3)$$

donde  $\gamma$  es el llamado *coeficiente de amortiguamiento*. El resultado (3) representa una oscilación armónica con frecuencia angular  $\omega = 2\pi / T$  y amplitud  $A$  exponencialmente decreciente (figura 4)

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \quad (4)$$

En particular, la amplitud al cabo de  $n$  oscilaciones completas, es decir en  $t_n = nT$ , es (figura 4)

$$A_n = A_0 e^{-\gamma t_n} \quad (5)$$

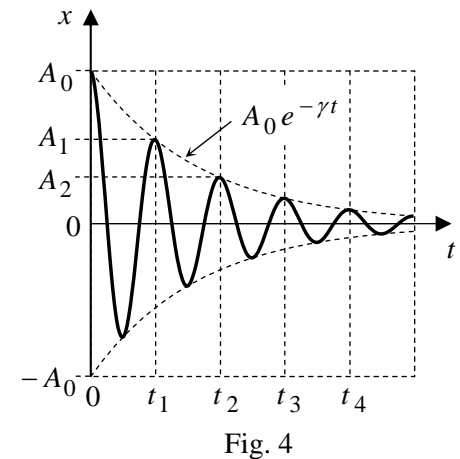
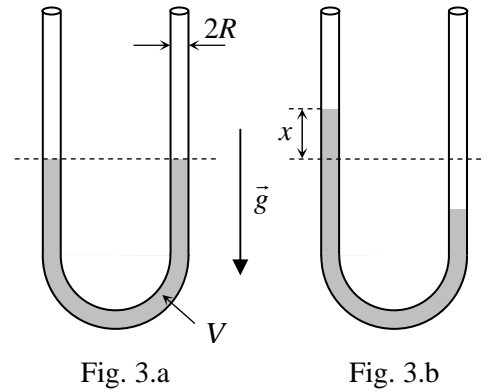
Si el amortiguamiento es débil ( $\gamma \ll \omega_0$ ), como es nuestro caso, la frecuencia  $\omega$  coincide aproximadamente con la frecuencia  $\omega_0$  en ausencia de amortiguamiento, de forma que la expresión (2) para el periodo de oscilación sigue siendo aproximadamente válida.

Pero, debido también a la fricción del agua con las paredes, la columna de agua no oscila "en bloque", es decir como un todo<sup>1</sup>. Como consecuencia, el *radio efectivo* del tubo es inferior al real, y por tanto el periodo de oscilación es mayor que el previsto en ausencia de fricción, de forma que

$$T^2 = \frac{2\pi}{gR_{ef}^2} V \quad (6)$$

con  $R_{ef} < R$ , y  $T > T_0$ .

En la primera parte de esta prueba experimental se van a realizar una serie de medidas para determinar los radios efectivo,  $R_{ef}$ , y real,  $R$ , del tubo. En nuestro montaje, estos dos radios son claramente diferentes, es decir la diferencia entre ambos es mayor que sus incertidumbres experimentales. En la segunda parte se obtendrá el coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$ .



<sup>1</sup> La capa de agua en contacto con las paredes prácticamente no se mueve.

## Medidas y preguntas.

### 1ª parte. Determinación de $R_{ef}$ y $R$ .

- 1.a) Mediante la jeringa graduada, añade agua dentro del tubo de forma que el volumen de agua sea sucesivamente  $V = 30, 40, 50 \dots 100 \text{ cm}^3$ . En cada uno de estos casos:
- Mida con el cronómetro el periodo de oscilación del agua en torno a su nivel de equilibrio. Sugerencia: mida cuatro veces el tiempo de cuatro oscilaciones completas ( $4T_1, 4T_2, 4T_3$  y  $4T_4$ ) y deduzca el periodo promedio  $T$ . Presente sus medidas y resultados en una tabla 1 como la de la figura 5.

Tabla I

$V \text{ (cm}^3\text{)}$	$4T_1 \text{ (s)}$	$4T_2 \text{ (s)}$	$4T_3 \text{ (s)}$	$4T_4 \text{ (s)}$	$T \text{ (s)}$	$T^2 \text{ (s}^2\text{)}$	$L \text{ (cm)}$	$R \text{ (mm)}$
30								
40								
50								
60								
70								
80								
90								
100								

Fig. 5

- Para cada  $V$ , marque con bolígrafo en los dos lados del tubo la posición del nivel de agua en equilibrio. La distancia entre estas dos marcas, que se medirá más tarde cuando se vacíe y estire el tubo, permitirá determinar su radio  $R$ . Tenga cuidado de que estas marcas no se borren.
- 1.b) Represente gráficamente en un papel milimetrado los puntos experimentales  $T^2$  (en ordenadas) frente a  $V$  (en abscisas).
- 1.c) Obtenga la pendiente de la recta que mejor se ajusta a estos puntos.
- 1.d) Deduzca el valor del radio efectivo del tubo,  $R_{ef}$ .
- 1.e) Haga una estimación de la incertidumbre (margen de error) del radio efectivo,  $\Delta R_{ef}$ .
- 1.f) Desmonte con cuidado un lado del tubo y vacíe el agua en un vaso. Desmonte completamente el tubo y estírelo sobre la mesa, mida la distancia  $L$  entre las marcas simétricas que ha hecho para cada  $V$  y deduzca en cada caso el radio  $R$  del tubo. Anote los valores de  $L$  y  $R$  en las columnas correspondientes de la tabla 1.
- 1.g) Calcule el valor medio de  $R$  y haga una estimación de su incertidumbre.

### 2ª parte. Determinación de $\gamma$ .

Vuelva a sujetar el tubo en U al listón de madera. Introduzca  $60 \text{ cm}^3$  de agua y marque en el listón el nivel de agua en equilibrio. Haga otra marca unos 20 cm por encima. Ésta será la posición inicial del nivel de agua,  $A_0$ , en todas las medidas posteriores. Antes de medir debe adquirir práctica en conseguir enrasar el nivel de agua con esta marca, soplando por el otro lado hasta alcanzar un nivel un poco más alto, tapando el tubo con el dedo y dejando entrar un poco de aire hasta que el nivel alcance la marca.

- 2.a) Mida las amplitudes  $A_1, A_2$  y  $A_3$  al cabo de una, dos y tres oscilaciones completas, respectivamente, es decir en  $t_1 = T$ ,  $t_2 = 2T$  y  $t_3 = 3T$  (el periodo  $T$  para este volumen de agua ya ha sido medido previamente). Repita la observación de la oscilación amortiguada todas las veces que sea necesario para,

mediante aproximaciones y marcas sucesivas, determinar estas amplitudes con suficiente precisión. Presente sus medidas en la tabla 2 de la figura 6.

Tabla 2			
$n$	$t_n$ (s)	$A_n$ (cm)	$\ln(A_n)$
0			
1			
2			
3			

Fig. 6

- 2.b) Transforme la expresión (4) para obtener una relación lineal entre una función de la amplitud,  $F(A)$ , y el tiempo  $t$ .
- 2.c) Represente gráficamente los puntos experimentales correspondientes,  $F(A)$  en función de  $t$ . Ajuste estos puntos a una línea recta.
- 2.d) Deduzca el coeficiente de amortiguamiento,  $\gamma$ .

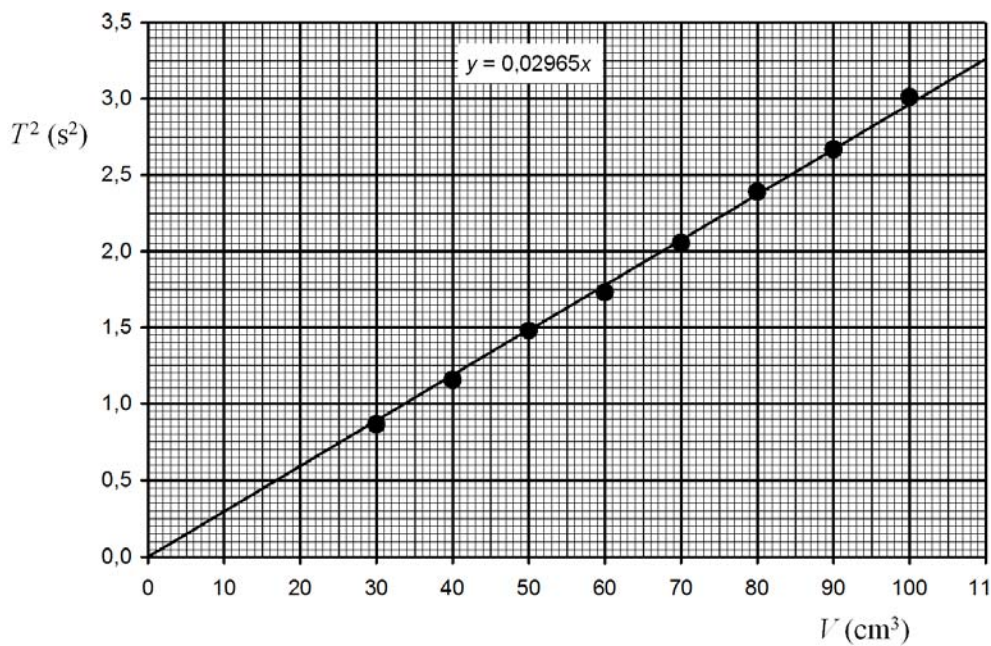
## Solución

1.a) Ejemplo de medidas reales con un tubo de radio nominal 5 mm.

Tabla 1

$V \text{ (cm}^3\text{)}$	$4T_1 \text{ (s)}$	$4T_2 \text{ (s)}$	$4T_3 \text{ (s)}$	$4T_4 \text{ (s)}$	$T \text{ (s)}$	$T^2 \text{ (s}^2\text{)}$	$L \text{ (cm)}$	$R \text{ (mm)}$
30	3,69	3,75	3,75	3,69	0,930	0,865	39,5	4,917
40	4,32	4,25	4,25	4,37	1,074	1,154	53,0	4,901
50	4,91	4,87	4,84	4,84	1,216	1,479	66,0	4,911
60	5,25	5,34	5,22	5,25	1,316	1,733	79,5	4,901
70	5,75	5,71	5,71	5,78	1,434	2,057	92,0	4,921
80	6,18	6,12	6,28	6,16	1,546	2,391	106,0	4,901
90	6,57	6,6	6,5	6,47	1,634	2,669	118,5	4,917
100	6,93	6,96	6,97	6,91	1,736	3,012	131,5	4,920

1.b) Se presenta la gráfica pedida, con un aspecto parecido el que tendría dibujada en papel milimetrado.



1.c) Los puntos experimentales se ajustan bien a una dependencia lineal que pasa por el origen, como prevé la ecuación (6) del enunciado. La pendiente de esta recta puede obtenerse fácilmente y con buena precisión observando las coordenadas de un punto de la recta alejado del origen. Por ejemplo, el extremo derecho de la recta tiene coordenadas  $(V; T^2) = (110 \text{ cm}^3; 3,26 \text{ s}^2)$ , luego la pendiente de la recta es

$$p = \frac{3,26 \text{ s}^2}{110 \text{ cm}^3} \Rightarrow \boxed{p = 2,96 \times 10^4 \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}}$$

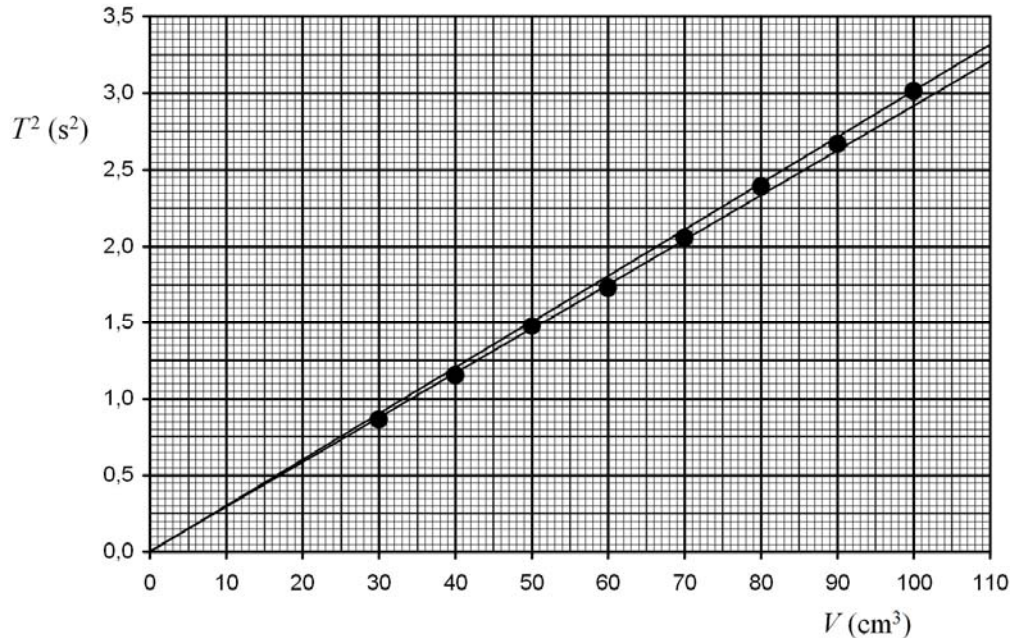
Nota: un ajuste por *mínimos cuadrados* conduce a una pendiente

$$p = 2,965 \times 10^4 \text{ s}^2 \text{ m}^{-3} .$$

1.d) De acuerdo con (6), la pendiente de esta recta es

$$p = \frac{2\pi}{gR_{ef}^2} \Rightarrow R_{ef} = \sqrt{\frac{2\pi}{gp}} = 4,65 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow \boxed{R_{ef} = 4,65 \text{ mm}}$$

1.e) La incertidumbre del radio efectivo depende de la incertidumbre de la pendiente. Esta última puede estimarse trazando las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a los puntos experimentales, teniendo en cuenta su dispersión en torno a la recta óptima<sup>2</sup>. En la siguiente figura se presenta una estimación gráfica de estas rectas.



Las pendientes de estas dos rectas se obtienen como en el apartado 1.c.

$$p_{\max} = \frac{3,31 \text{ s}^2}{110 \text{ cm}^3} = 3,01 \times 10^4 \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}; \quad p_{\min} = \frac{3,21 \text{ s}^2}{110 \text{ cm}^3} = 2,92 \times 10^4 \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$$

Los correspondientes radios efectivos resultan

$$R_{ef,\min} = \sqrt{\frac{2\pi}{g p_{\max}}} = 4,61 \text{ mm}; \quad R_{ef,\max} = \sqrt{\frac{2\pi}{g p_{\min}}} = 4,68 \text{ mm}$$

Por tanto

$$\Delta R_{ef} = \frac{R_{ef,\max} - R_{ef,\min}}{2}, \quad \boxed{\Delta R_{ef} = 0,04 \text{ mm}}$$

Nota: la incertidumbre de la pendiente  $p$  puede calcularse analíticamente. Con un nivel de confianza alto, del 95%, se obtiene una incertidumbre relativa del 1,2%. Como el radio efectivo es proporcional a  $p^{-1/2}$ , el error relativo transmitido al radio es del 0,6%, de forma que  $\Delta R_{ef} = 0,03 \text{ mm}$ . Como suele ocurrir, el método de estimar las pendientes máxima y mínima sobrevalora las incertidumbres.

1.f) Los valores de  $L$  medidos se recogen en la penúltima columna de la Tabla 1. El radio se calcula en cada caso teniendo en cuenta que

<sup>2</sup> La incertidumbre de cada valor experimental de  $T^2$  (barra de error) puede estimarse mediante el error probable de las varias medidas realizadas. El resultado es inferior o del orden del radio de los puntos dibujados en la gráfica.

$$V = \pi R^2 L \Rightarrow R = \sqrt{\frac{V}{\pi L}}$$

Los valores obtenidos para  $R$  se presentan en la última columna de la Tabla 1.

1.g) El promedio y el error probable<sup>3</sup> de esta serie de datos son

$$R = 4,911 \text{ mm}, \quad \Delta R = 0,003 \text{ mm}$$

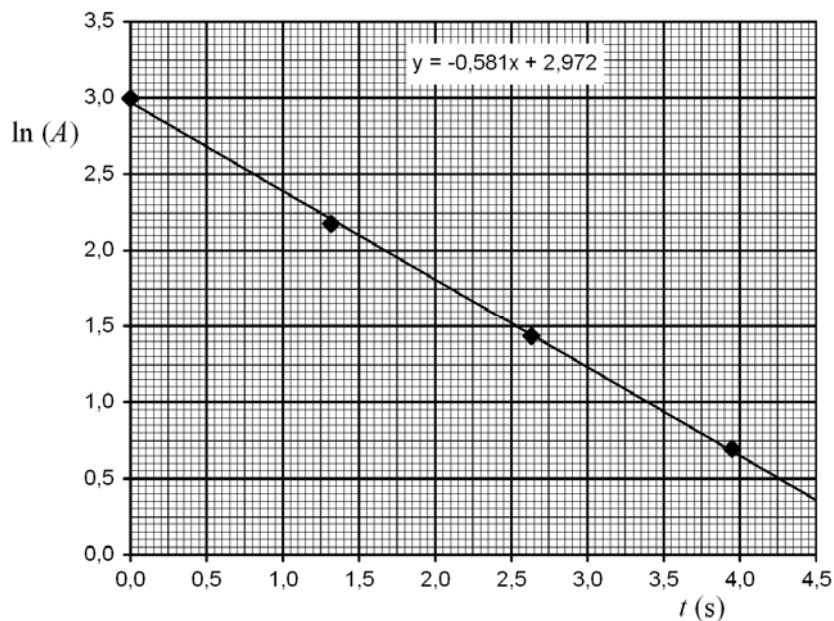
2.a) Tabla 2. Amplitudes tras varias oscilaciones para  $V = 60 \text{ cm}^3$

$n$	$t_n$ (s)	$A_n$ (cm)	$\ln(A_n)$
0	0,000	20,0	3,00
1	1,316	8,8	2,18
2	2,632	4,2	1,44
3	3,948	2,0	0,69

2.b) Tomando logaritmos en (4) se obtiene una dependencia lineal entre  $\ln(A)$  y  $t$ , con pendiente  $-g$ .

$$\ln(A) = \ln(A_0) - \gamma t$$

2.c) Los puntos experimentales se ajustan bien a la dependencia prevista, como puede observarse en la siguiente gráfica



La pendiente de la recta puede obtenerse a partir de las coordenadas de los puntos extremos

$$p = \frac{0,37 - 2,97}{4,5 - 0} \text{ s}^{-1} = -0,58 \text{ s}^{-1}$$

2.d) La pendiente de esta recta es  $-g$ , de forma que

$$\gamma = 0,58 \text{ s}^{-1}$$

<sup>3</sup> Para un nivel de confianza del 95%, el margen de incertidumbre del radio se eleva a 0,007 mm