

Prueba experimental. Plano inclinado¹

Objetivos.

Se va a estudiar experimentalmente el descenso de una esfera por un plano inclinado de pendiente variable. En concreto se va a determinar el *factor geométrico* que diferencia la aceleración de descenso en este experimento de la que tendría un cuerpo que deslizase sin fricción por un plano inclinado.

Materiales.

- Carril de aluminio con perfil en U.
- Listón de madera con manguito roscado embutido y cinta adhesiva de doble cara.
- Topes de plástico y aluminio.
- Tornillo con cabeza en forma de gancho.
- Esfera de acero.
- Cinta métrica.
- Cronómetro.

Montaje; procedimiento experimental.

- Quite el papel que recubre la cinta adhesiva de doble cara pegada al listón de madera, y pegue en su centro el carril de aluminio, como se indica en la figura 1. Tenga cuidado de no doblar ni mellar el carril, ya que cualquier imperfección influiría en los resultados de la prueba.



Fig. 1

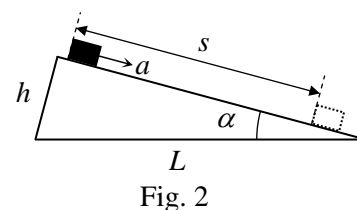
- Enrosque el tornillo en el manguito embutido en el listón, con el gancho del mismo lado que el carril.
- Coloque el tope de aluminio en la acanaladura del carril más próxima al tornillo, y el de plástico en la del otro extremo. Estos topes sirven para marcar el comienzo y el final de la carrera de la esfera.
- Sitúe el montaje en una zona de la mesa que le permita trabajar y tomar notas con comodidad. La cinta adhesiva de doble cara de la parte inferior del listón permite fijar el dispositivo a la mesa, para evitar que se desplace mientras realiza las medidas experimentales. Tenga en cuenta que su mesa de trabajo puede no ser horizontal, de forma que un cambio de posición puede causar un cambio de desnivel.
- Procure mantener limpios el carril y la esfera, para evitar irregularidades y fuerzas de adherencia.
- Conviene que inicialmente la cabeza del tornillo esté orientada en paralelo al carril, como se muestra en la figura 1. Recuerde hacia donde está inicialmente orientado el lado abierto del gancho, porque tendrá que modificar el desnivel del carril girando un número entero de vueltas el tornillo.
- Va a medir el tiempo de descenso de la esfera por el carril para diferentes desniveles. Antes de realizar medidas definitivas es conveniente que adquiera práctica con el manejo del cronómetro.
- Tenga en cuenta que la esfera debe partir con velocidad inicial nula. Por tanto, no debes empujarla cuando la sueltes, ni presionarla contra el tope de partida, que podría darle un impulso inicial.
- Para determinar el tiempo de descenso con cada desnivel, es conveniente que realice un mínimo de cinco medidas y tome como resultado el valor medio.

¹ Esta prueba experimental está inspirada en la propuesta en la Olimpiada Argentina de Física de 2003.

Modelo teórico.

En un experimento **idealizado**, supongamos un cuerpo que desciende deslizando **sin fricción** por un plano inclinado de ángulo α respecto a la horizontal (figura 2). La aceleración con que desciende el cuerpo es

$$a = g \operatorname{sen} \alpha = g \frac{h}{L} \quad (1)$$



La aceleración puede determinarse experimentalmente midiendo el tiempo t que tarda el cuerpo en recorrer una cierta distancia s , partiendo del reposo. Como el movimiento es uniformemente acelerado

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

O sea

$$a = \frac{2s}{t^2} \quad (2)$$

El experimento podría plantearse como una práctica de laboratorio para determinar la aceleración de la gravedad, g , con el siguiente método:

- Para un valor de s fijo y conocido, se cronometran los tiempo de descenso por el plano para diversos valores de h . Aplicando (2) se calcula la aceleración en cada caso.
- Para que los tiempos de descenso sean altos y puedan cronometrarse manualmente con buena precisión relativa, interesa que h sea pequeña, por lo que esta altura es difícil de medir con precisión. En nuestro dispositivo experimental no es necesario conocer el valor de esta altura, como se verá a continuación. Basta con realizar sucesivas medidas incrementando h en una cantidad constante, correspondiente a una vuelta del tornillo. Si la altura inicial es h_0 y se gira en sentido ascendente n vueltas el tornillo, de paso de rosca d , la altura alcanzada es

$$h_n = h_0 + n d \quad (3)$$

- Se representan gráficamente los puntos experimentales $(x, y) = (n, a)$. Teniendo en cuenta (1) y (3), estos puntos deberían ajustarse a una línea recta² con pendiente gd/L , independientemente del valor de la altura inicial h_0 .
- Por tanto, supuesto que d y L son conocidas, para obtener g bastaría con determinar la pendiente de la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales anteriores.

En un experimento **real** es difícil eliminar el rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado. Las pérdidas energéticas por fricción podrían minimizarse mediante un colchón de aire que impidiese el contacto directo entre el cuerpo y el plano. Pero es mucho más sencillo y económico emplear una esfera rígida que desciende rodando sin deslizar. En estas circunstancias, el punto de contacto de la esfera con el plano tiene velocidad nula (no hay deslizamiento relativo), la fuerza de rozamiento no realiza trabajo y no se pierde energía por fricción.

Pero la aceleración del movimiento del centro de la esfera ya no es la dada en (1), puesto que la energía potencial gravitatoria inicial no sólo se convierte en energía cinética de traslación (movimiento del centro de la esfera) sino además en energía cinética de rotación (giro de la masa de la esfera en torno a su centro). Por ello, la aceleración del centro de la esfera se reduce en un cierto factor $F > 1$.

$$a = g \frac{h}{FL} \quad (4)$$

² La dependencia prevista no es exactamente lineal porque L aumenta con h . Si se trabaja con ángulos α pequeños, como va a ser nuestro caso, esta variación es despreciable y puede considerarse L aproximadamente constante.

El principal objetivo de esta prueba experimental no es determinar el valor de la aceleración de la gravedad, que es bien conocido, sino el valor del factor geométrico F del dispositivo experimental empleado³, y hacer una estimación de su incertidumbre.

Medidas y preguntas.

- 1) Mida el recorrido de la bola, s , y la distancia entre los puntos de apoyo del plano sobre la mesa, L , (figura 3). Anote los resultados en la hoja de respuestas.
- 2) Girando el tornillo, ajuste la altura h hasta conseguir que el tiempo de descenso de la bola esté entre 4 y 5 s. Ésta va a ser la situación inicial de tu serie de medidas, es decir $h = h_0$.

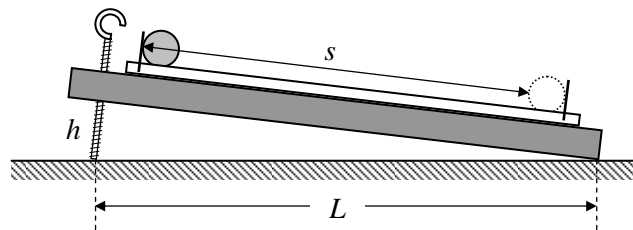


Fig. 3

Mida varias veces el tiempo de descenso de la bola, calcule su valor medio y la aceleración correspondiente. Anote tus medidas y resultados en la tabla de la hoja de respuestas.

Repita el proceso anterior incrementando h en sucesivas vueltas completas del tornillo, es decir para valores h_n como los dados en (3) con $n = 1, 2, 3, \dots$, hasta que el tiempo de descenso sea inferior a 2,3 s.

- 3) Represente gráficamente en un papel milimetrado los puntos experimentales a (en ordenadas) frente a n (en abscisas).
- 4) Obtenga la pendiente, p , y la ordenada en el origen, c , de la recta que mejor se ajusta a estos puntos.
- 5) Deduzca los valores del factor geométrico, F , y de la altura inicial, h_0 .
- 6) Haga una estimación de la incertidumbre (margen de error) de la pendiente de la recta, Δp . Calcule la incertidumbre transmitida al valor del factor geométrico, ΔF_p .
- 7) Si la incertidumbre del paso de rosca del tornillo es $\Delta d = 0,01 \text{ mm}$, calcule la incertidumbre transmitida al valor del factor geométrico, ΔF_d .
- 8) Teniendo únicamente en cuenta las dos fuentes de error anteriores, calcule la incertidumbre total de F .

Datos:

Aceleración de la gravedad: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Paso de rosca del tornillo: $d = 0,70 \text{ mm}$

³ Ayuda: $1 < F < 2$.

Solución

- 1) Dimensiones de un plano inclinado típico (puede haber ligeras variaciones de un montaje a otro):

$$s = 35,3 \text{ cm} \quad L = 48,6 \text{ cm}$$

- 2) Tabla de medidas:

| n | Tiempos de descenso, t (s) | | | | | \bar{t} (s) | a (m/s ²) |
|-----|------------------------------|------|------|------|------|---------------|-------------------------|
| 0 | 4,44 | 4,48 | 4,42 | 4,50 | 4,48 | 4,464 | 0,0354 |
| 1 | 3,92 | 3,98 | 3,98 | 3,95 | 3,98 | 3,962 | 0,0450 |
| 2 | 3,60 | 3,61 | 3,58 | 3,57 | 3,63 | 3,598 | 0,0545 |
| 3 | 3,29 | 3,25 | 3,29 | 3,30 | 3,30 | 3,286 | 0,0654 |
| 4 | 3,10 | 3,00 | 3,08 | 3,06 | 3,06 | 3,060 | 0,0754 |
| 5 | 2,85 | 2,86 | 2,92 | 2,92 | 2,93 | 2,896 | 0,0842 |
| 6 | 2,75 | 2,73 | 2,75 | 2,73 | 2,75 | 2,742 | 0,0939 |
| 7 | 2,57 | 2,61 | 2,60 | 2,61 | 2,62 | 2,602 | 0,1043 |
| 8 | 2,48 | 2,50 | 2,44 | 2,45 | 2,48 | 2,470 | 0,1157 |
| 9 | 2,36 | 2,36 | 2,38 | 2,42 | 2,37 | 2,378 | 0,1248 |
| 10 | 2,30 | 2,25 | 2,26 | 2,30 | 2,30 | 2,282 | 0,1356 |
| 11 | 2,23 | 2,24 | 2,18 | 2,24 | 2,19 | 2,216 | 0,1438 |

- 3) En la gráfica de la figura 4 se representan los puntos $(x, y) = (n, a)$ obtenidos

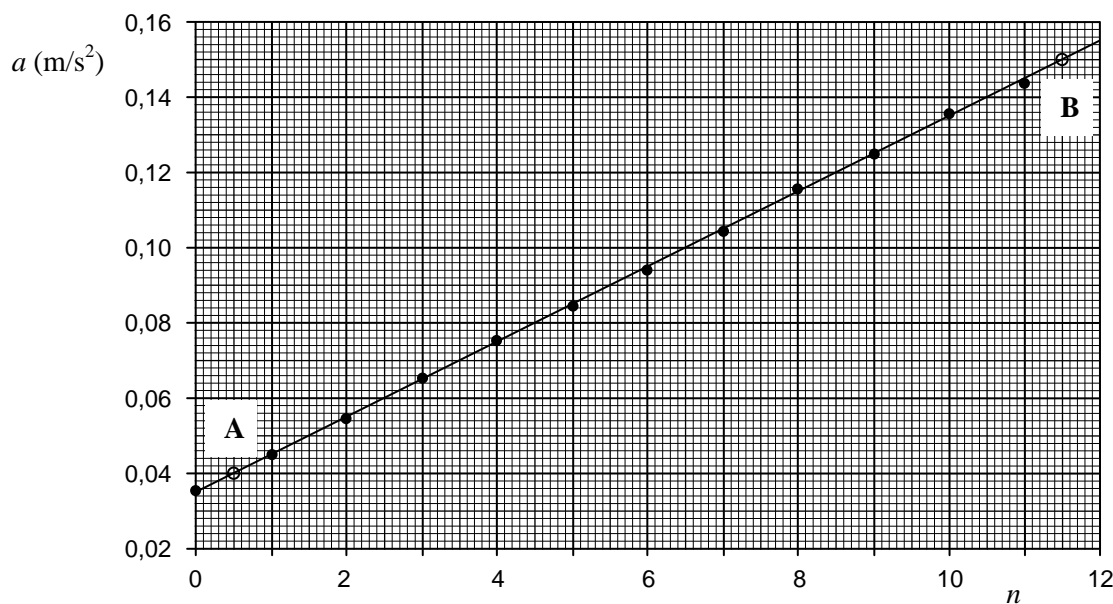


Fig. 4

- 4) En la gráfica anterior también se ha trazado la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales. La pendiente, p , y la ordenada en el origen, c , de esta recta pueden determinarse a partir de las coordenadas de dos puntos alejados sobre dicha recta, por ejemplo los puntos A y B indicados en la gráfica.

$$(x_A; y_A) = (0,50; 0,040 \text{ m/s}^2)$$

$$(x_B; y_B) = (11,50; 0,150 \text{ m/s}^2)$$

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \boxed{p = 0,0100 \text{ m/s}^2}$$

La ordenada en el origen de la recta puede deducirse de las coordenadas de uno de los puntos auxiliares (o también puede leerse directamente en la gráfica)

$$y_A = px_A + c \Rightarrow c = y_A - px_A \Rightarrow \boxed{c = 0,035 \text{ m/s}^2}$$

Nota: un ajuste analítico por el método de mínimos cuadrados conduce a un resultado muy similar

$$p = 0,00996 \text{ m/s}^2 \quad c = 0,0351 \text{ m/s}^2$$

- 5) Teniendo en cuenta las expresiones (3) y (4) del enunciado se espera una dependencia $a(n)$ de la forma

$$a = \frac{g}{FL}(h_0 + nd)$$

La pendiente y la ordenada en el origen de esta recta son

$$p = \frac{gd}{FL} \quad c = \frac{gh_0}{FL}$$

Por tanto, los valores de F y h_0 pueden obtenerse de la forma

$$F = \frac{gd}{pL} \Rightarrow \boxed{F = 1,41}$$

$$h_0 = \frac{cFL}{g} \Rightarrow \boxed{h_0 = 2,5 \text{ mm}}$$

- 6) La incertidumbre de p puede estimarse trazando las dos rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales, teniendo en cuenta su dispersión (figura 5).

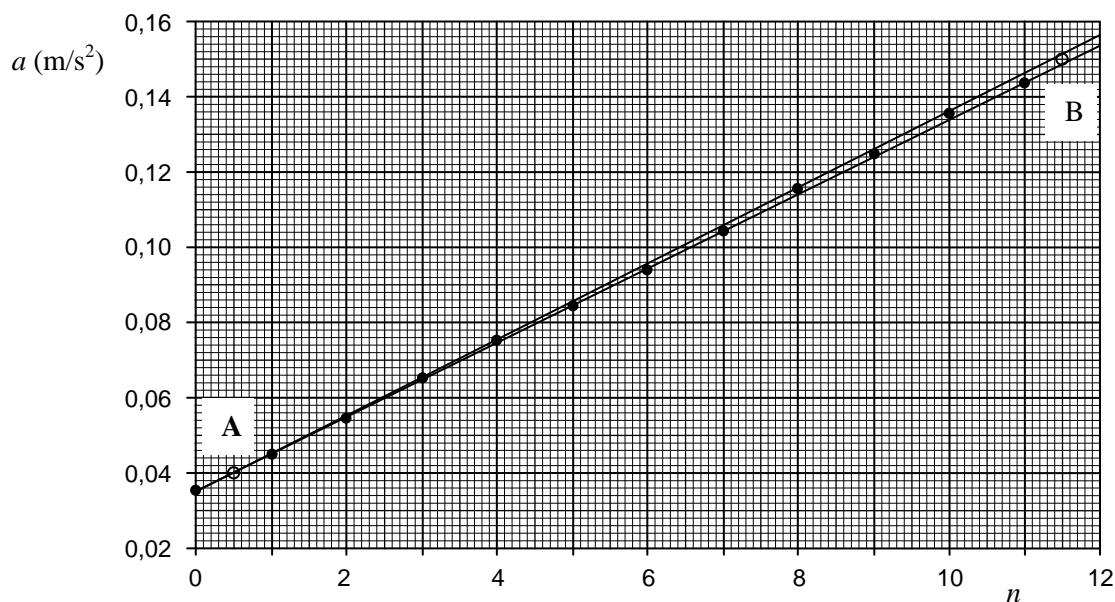


Fig. 5

Como los primeros puntos están bien alineados y la dispersión es apreciablemente mayor para aceleraciones altas⁴, una estimación razonable para las incertidumbres de los puntos auxiliares A y B podría ser

⁴ Los errores típicos de los tiempos de descenso son del orden de 0,01 s. Al propagar esta incertidumbre a la aceleración, se obtienen valores para Δa entre 0,0002 m/s², para las aceleraciones más bajas, y 0,0015 m/s² para las más altas. Estas

$$\Delta y_A \approx 0 \quad \Delta y_B \approx 0,0015 \text{ m/s}^2$$

Por tanto

$$p_{\max} = \frac{y_{B,\max} - y_A}{x_B - x_A} = 0,01014$$

$$p_{\min} = \frac{y_{B,\min} - y_A}{x_B - x_A} = 0,00986$$

$$\Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta p = 0,00014 \text{ m/s}^2}$$

Nota: Cálculos analíticos que no detallaremos aquí permiten comprobar que esta incertidumbre es razonable. En concreto corresponde a un nivel de confianza bastante alto, del orden del 85%.

La incertidumbre transmitida al factor geométrico F puede calcularse numéricamente en la forma

$$\left. \begin{aligned} F_{\max} &= \frac{g d}{p_{\min} L} = 1,433 \\ F_{\min} &= \frac{g d}{p_{\max} L} = 1,393 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta F_p = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} = 0,020 \Rightarrow \boxed{\Delta F_p = 0,02}$$

El resultado se ha expresado con una única cifra significativa, pues nos basamos en estimaciones de baja precisión.

Esta incertidumbre también puede obtenerse tomando incrementos, en valor absoluto, en la expresión que relaciona F con p

$$F = \frac{g d}{p L} \Rightarrow \Delta F_p = \frac{g d \Delta p}{p^2 L} = \frac{F}{p} \Delta p = 0,02$$

Nótese que, como es bien conocido en dependencias de tipo producto o cociente, se transmite el error relativo: $\Delta F_p / F = \Delta p / p$.

- 7) Como $\Delta d = 0,01 \text{ mm}$, se espera que el paso de rosca esté comprendido entre $d_{\min} = 0,69 \text{ mm}$ y $d_{\max} = 0,71 \text{ mm}$. Por tanto

$$\left. \begin{aligned} F_{\max} &= \frac{g d_{\max}}{p L} = 1,433 \\ F_{\min} &= \frac{g d_{\min}}{p L} = 1,393 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta F_d = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} = 0,020 \Rightarrow \boxed{\Delta F_d = 0,02}$$

Como en el apartado anterior, esta incertidumbre también puede calcularse tomando incrementos. F es directamente proporcional a p , y es inmediato demostrar que de nuevo se transmite el error relativo, es decir

$$\frac{\Delta F_d}{F} = \frac{\Delta d}{d} \Rightarrow \Delta F_d = 0,02$$

- 8) La incertidumbre total del factor geométrico, teniendo únicamente en cuenta las dos fuentes de error anteriores, podría estimarse sumando las dos contribuciones

$$\Delta F = \Delta F_p + \Delta F_d = 0,04$$

Pero, debido a que estas fuentes de error son independientes, es más correcto considerar

incertidumbres son inferiores al tamaño de los puntos dibujados en la gráfica, excepto en los dos últimos, por lo que no se han representado *barras de error*.

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_p^2 + \Delta F_d^2} = 0,028 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta F = 0,03}$$

En total, el resultado principal del experimento puede expresarse en la forma

$$\boxed{F = 1,41 \pm 0,03}$$

Nota final: Los estudiantes que participan en la OEF no han estudiado todavía la *Dinámica del sólido rígido*, por lo que pueden desconocer el planetamiento analítico del problema de una esfera que desciende rodando sin deslizar por un plano inclinado. Dejamos como ejercicio para estos estudiantes demostrar, cuando tengan conocimientos suficientes, que el valor esperado para el factor geométrico F en nuestro dispositivo es

$$F = 1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - b^2}$$

donde R es el radio de la esfera y b la semianchura del carril, (figura 6).

En el montaje experimental empleado, $R = 1,25$ cm y $b = 3,5$ cm, con lo que se obtiene

$$F = 1,434$$

Este valor teórico queda dentro del margen de incertidumbre del resultado experimental. En todo caso, no es de extrañar que se obtenga un valor de F algo inferior al teórico, puesto que siempre existen pequeñas pérdidas energéticas. Por ejemplo, se escucha durante el descenso de la bola un claro sonido (energía sonora) debido a pequeñas irregularidades y falta de rigidez del carril de aluminio.

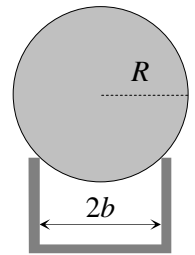


Fig. 6