

## Prueba experimental. Bobinas de Helmholtz.

### Objetivos.

Se van a construir un par de bobinas en montaje de Helmholtz y se va a estudiar experimentalmente el campo magnético que crean en su zona central,  $B_C$ , en función de la corriente que circula por ellas,  $I$ . Además de la dependencia  $B_C(I)$ , se obtendrá la componente horizontal del campo magnético terrestre.

### Materiales.

- Hilo esmaltado de cobre (6,5 m) con conectores ("bananas") en sus extremos.
- Dos cilindros de metacrilato transparente con cinta adhesiva de doble cara en su superficie exterior.
- Cinta adhesiva y masilla ("blu-tack").
- Cartulina.
- Regla.
- Dos imanes cilíndricos iguales, e hilo de algodón para colgarlos.
- Cilindro y barra de PVC.
- Cables de conexión eléctrica.
- Potenciómetro.
- Pila de petaca.
- Polímetro.
- Cronómetro.

### Modelo teórico.

El campo magnético en el centro  $O$  de una bobina de  $N$  espiras circulares de radio  $R$ , delgadas y apretadas, por las que circula una corriente  $I$  es

$$B_O = \frac{\mu_0 N I}{2R} \quad (1)$$

donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$  es la permeabilidad del vacío. La dirección y el sentido de este campo se indican en la figura 1, donde por simplicidad se ha dibujado una única espira. Este campo no es uniforme, sino que decrece rápidamente a lo largo del eje de simetría de la espira (OY en la figura 1).

En muchas ocasiones interesa disponer de un campo magnético uniforme en una zona del espacio. Uno de los montajes más empleados para conseguirlo son las llamadas *bobinas de Helmholtz*: se hace circular la misma corriente y en el mismo sentido por dos bobinas iguales y coaxiales situadas en planos paralelos, separadas una **distancia igual al radio de las espiras** (figura 2; de nuevo se ha representado una única espira en cada bobina). Puede demostrarse que con esta configuración geométrica el campo magnético en torno al centro geométrico  $C$  del sistema es muy uniforme, con variaciones inferiores al 1% dentro de una región con dimensiones del orden de  $R/2$ .

Lógicamente, el campo magnético en  $C$  seguirá siendo directamente proporcional al número total  $N$  de espiras de las dos bobinas ( **$N/2$  en cada una**) y a la corriente  $I$  que circula por ellas. Pero la distancia de  $C$  a los conductores es mayor que el radio de las espiras, por lo que es de esperar que  $B_C$  sea inferior al que se tiene en el centro de una única bobina de  $N$  espiras, es decir

$$B_C = K B_O \quad (2)$$

donde  $K$  es una constante menor que la unidad. El primer objetivo de esta prueba experimental es determinar el valor de esta constante.

Para medir el campo magnético se va a emplear una brújula formada por los dos imanes cilíndricos, unidos longitudinalmente y colgados mediante un hilo. En equilibrio, el eje del cilindro se orienta en la

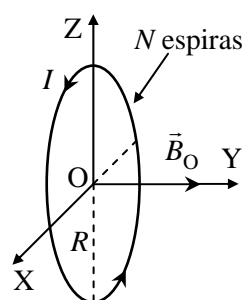


Fig. 1

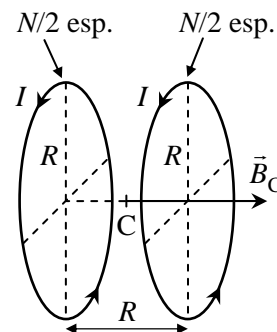


Fig. 2

dirección del campo magnético, y el periodo  $T$  de **pequeñas** oscilaciones torsionales de la brújula (en el sentido de retorcer el hilo) en torno a dicha orientación de equilibrio depende del módulo del campo,  $B$ , en la forma<sup>1</sup>

$$\frac{1}{T^2} = \alpha B \quad (3)$$

donde  $\alpha$  es una constante que depende de la "potencia" del imán (de su *momento magnético*) y de la masa y dimensiones del cilindro (de su *momento de inercia*). Para nuestra brújula

$$\alpha = (4,0 \pm 0,1) \times 10^4 \text{ T}^{-1}\text{s}^{-2} \quad (4)$$

Las bobinas de Helmholtz se orientarán con su eje en la dirección del campo magnético terrestre  $B_H$  (componente horizontal), y la brújula se colocará en el centro de las bobinas, de forma que estará sometida a un campo total aproximadamente uniforme

$$B = B_H + B_C = B_H + K \frac{\mu_0 N}{2R} I \quad (5)$$

Consideraremos el campo  $B_H$  como positivo. Pero nótese que el campo  $B_C$  de las bobinas puede ser positivo o negativo según sea el signo de  $I$ , es decir el sentido de la corriente que circula por ellas.

El valor local de  $B_H$  depende notablemente de la proximidad de estructuras de hierro, del edificio o de la propia mesa de trabajo, y será la segunda incógnita del problema.

### Montaje experimental.

1) Construcción de las bobinas de Helmholtz (figura 3).

- \* Retire el papel protector de la cinta adhesiva de doble cara que hay pegada en la superficie exterior de cada cilindro de metacrilato. Esta superficie adhesiva va a facilitar el bobinado de las espiras.
- \* **Dejando libres unos 30 cm de hilo de cobre**, con su banana, comience a bobinar **10 vueltas** de hilo sobre la cinta adhesiva de un cilindro. Para que no se despegue el punto inicial del bobinado, emplee un trozo de cinta adhesiva normal. Procure que las sucesivas espiras sean bien circulares y estén bien apretadas<sup>2</sup> unas a otras. Sugerencia: tras dar cada vuelta de hilo, empuje lateralmente con las uñas para apretarla contra las anteriores.
- \* Asegure el punto final de las espiras con cinta adhesiva. Compruebe que ha contado bien el número de espiras,  $N / 2 = 10$ .
- \* **Deje libres unos 20 cm de hilo** entre las dos bobinas y repita el proceso de bobinado de 10 espiras sobre el segundo cilindro de metacrilato.
- \* Si ha realizado correctamente el proceso anterior, deberían quedar libres al final unos 30 cm de hilo de cobre, con su banana de conexión.
- \* Trace una línea longitudinal en la cartulina y dos líneas perpendiculares a la anterior separadas entre sí una distancia igual al radio de las espiras. Estas líneas serán útiles como referencia visual para situar a continuación las bobinas en montaje de Helmholtz.
- \* Pegue un trocito de masilla sobre cada cilindro, en la zona de principio y fin del bobinado, y pegue los cilindros sobre las líneas transversales de la cartulina, con sus ejes de simetría sobre la línea longitudinal



Fig. 3

<sup>1</sup> Supuesto despreciable el momento de torsión del hilo del que cuelga la brújula.

<sup>2</sup> El hilo de cobre está esmaltado con un material aislante, de forma que no hay contacto eléctrico entre espiras adjuntas.

dibujada y los hilos de cobre sobre la cartulina, como se muestra en la figura 3. Las dos bobinas deben **ser coaxiales, estar en planos verticales separados una distancia igual al radio de las espiras** (entre los planos centrales de los dos bobinados) **y la corriente debe circular en el mismo sentido por ambas**.

- \* Como la masilla es plástica, es fácil realizar pequeños retoques de orientación o distancia entre las bobinas presionando en el sentido adecuado.
- \* Por último, doble y sujete a la cartulina con cinta adhesiva todos los hilos de cobre juntos, de forma que sean aproximadamente paralelos al eje del sistema. Como es fácil comprender, de esta forma se anula el campo magnético que produce la corriente que circula por ellos y que podría afectar a las medidas.
- \* **Atención:** maneje con cuidado el hilo de cobre porque es bastante frágil. En particular, evite las curvaturas fuertes y los nudos, que pueden provocar que se rompa, con la consiguiente pérdida de tiempo por tener que empezar de nuevo. Por otra parte, tenga también **cuidado de no cortarse con el hilo**.

## 2) Construcción de la brújula (figura 4).

- \* Una longitudinalmente los dos imanes y átelos por su centro con una lazada de hilo de algodón (también puede aprisionar el hilo entre los dos imanes).
- \* Cuelgue la brújula del soporte construido con el tubo y la barra de PVC. Con los imanes cerca de la mesa, sujete el hilo a la barra con cinta adhesiva.
- \* Se puede ajustar la altura de la brújula girando la barra de PVC para enrollar o desenrollar hilo, y la posición horizontal desplazando la barra en el tubo.
- \* Es inevitable que el imán quede en equilibrio un poco inclinado respecto a la horizontal, ya que el campo local también tiene componente vertical.

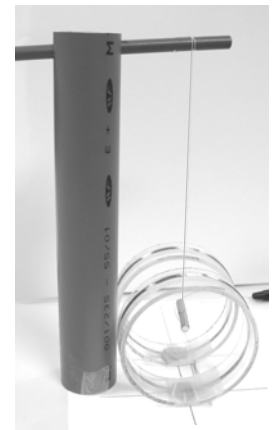


Fig. 4

## 3) Disposición final y conexiones eléctricas (figura 5).

- \* Procure situar el montaje alejado de elementos de hierro de la mesa (patas, travesaños ...).
- \* Sitúe la brújula en la zona central de las bobinas. La brújula marca, en equilibrio, la dirección de la componente horizontal del campo magnético local,  $B_H$ . Oriente las bobinas de forma que su eje de simetría coincida con esta dirección y el centro de la brújula esté en el centro de las bobinas.
- \* Una vez conseguida la posición adecuada del soporte de la brújula y de las bobinas, sujete el sistema a la cartulina y a la mesa con cinta adhesiva para evitar posteriores movimientos involuntarios.
- \* Las bobinas se alimentan con una pila de petaca a través de un potenciómetro (resistencia variable) que permite ajustar la tensión aplicada a las bobinas<sup>3</sup>.
- \* Conecte la pila y las bobinas al potenciómetro con los cables suministrados, siguiendo el esquema de la figura 6, donde los puntos negros indican los puntos de conexión con bananas.
- \* Atención: para conseguir un buen contacto eléctrico, las lengüetas terminales de la pila deben introducirse entre el metal y el plástico de los conectores (no dentro del terminal metálico, que es demasiado ancho).



Fig. 5

<sup>3</sup> Como puede observar, el potenciómetro lleva montada una resistencia de protección para evitar corrientes elevadas que agotarían rápidamente la pila.

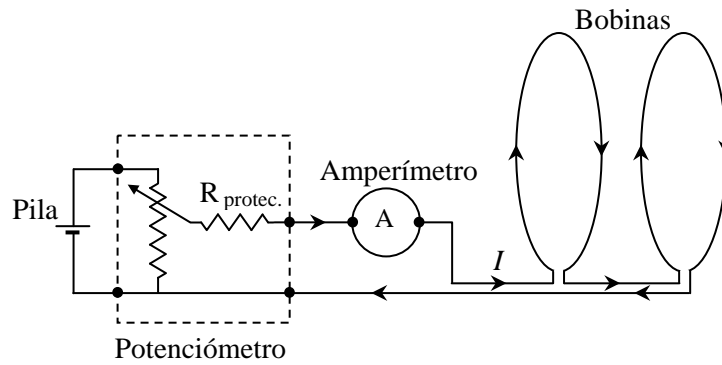


Fig. 6

- \* La corriente  $I$  se mide con el polímetro actuando como amperímetro, conectado en serie en el circuito. Emplea la escala de 200 mA.
- \* Atención: para evitar que se agote la pila, **mantenga el circuito abierto cuando no esté midiendo**.
- \* Antes de empezar a medir, familiarícese con el manejo del potenciómetro, el polímetro y el cronómetro.
- \* Inicialmente se va a medir con  $B_C$  positivo, es decir en el mismo sentido que  $B_H$ . Teniendo en cuenta (3) y (5), esto implica que el periodo de oscilación torsional de la brújula,  $T$ , debe ser decreciente con  $I$  (es decir, a mayor  $I$  menor  $T$ ). Si en su sistema ocurre lo contrario, invierta el sentido de la corriente, intercambiando las conexiones de la pila al potenciómetro.
- \* La situación anterior, según nuestro convenio de signos, corresponde a  $I > 0$ . Si el amperímetro indica una corriente negativa, intercambie los puntos de conexión en el polímetro.
- \* Posteriormente se realizarán medidas con  $I < 0$ , para lo que tendrá que invertir el sentido de la corriente.
- \* Si se encuentra con que  $T$  no depende apenas de  $I$ , hay un problema de montaje en su circuito: o bien la corriente no está circulando por las bobinas (revise las conexiones), o lo hace en sentidos opuestos.
- \* Después de hacer las medidas, **deje su montaje experimental sobre la mesa, tal y como lo ha utilizado para medir**, ya que el equipo de correctores lo valorará durante la prueba. Al final, después de entregar el ejercicio, desmonte el sistema y recoja sus diversos elementos en las cajas correspondientes.

### Medidas y preguntas.

- a) Mida el periodo  $T$  de pequeñas oscilaciones torsionales de la brújula en torno a su orientación de equilibrio para un mínimo de diez valores de  $I$ , entre  $I = 0$  e  $I = 200$  mA. Explique detalladamente su método de medida y presente los resultados en la tabla de la hoja de respuestas. Tabule también los valores de  $1/T^2$ , que necesitará más adelante.
- b) Invierta el sentido de la corriente, y haga varias medidas de  $T$  entre  $I = 0$  e  $I = -80$  mA. Presente los resultados en la tabla de la hoja de respuestas.
- c) Represente gráficamente en un papel milimetrado todos los puntos  $(x, y) = (I, 1/T^2)$ .
- d) Determine la pendiente,  $p$ , y la ordenada en el origen,  $y_0$ , de la recta que mejor se ajusta a estos puntos.
- e) Deduzca los valores de la constante  $K$  de las bobinas de Helmholtz y del campo magnético local  $B_H$ .
- f) Haga una estimación razonada de la incertidumbre  $\Delta p$  de la pendiente obtenida en el apartado d).
- g) Teniendo en cuenta lo anterior y la incertidumbre de la constante  $\alpha$  dada en (4), haga una estimación de la incertidumbre  $\Delta K$  de la constante de las bobinas que ha obtenido en e).
- h) En el apartado b) ha medido  $T$  hasta  $I = -80$  mA. Si ha probado a seguir aumentando la corriente en este sentido negativo, habrá observado que al principio la brújula oscila muy lentamente, que para una corriente suficientemente alta "pierde el rumbo", es decir da vueltas o oscila en torno a una dirección

diferente, y que, para corrientes más altas, la brújula se orienta en sentido opuesto al inicial. ¿Podría explicar este comportamiento? Teniendo en cuenta sus resultados del apartado e), ¿a partir de qué corriente  $I_0$  se espera teóricamente la inversión de sentido de la brújula? Mida experimentalmente  $I_0$  y compruebe si coinciden aproximadamente.

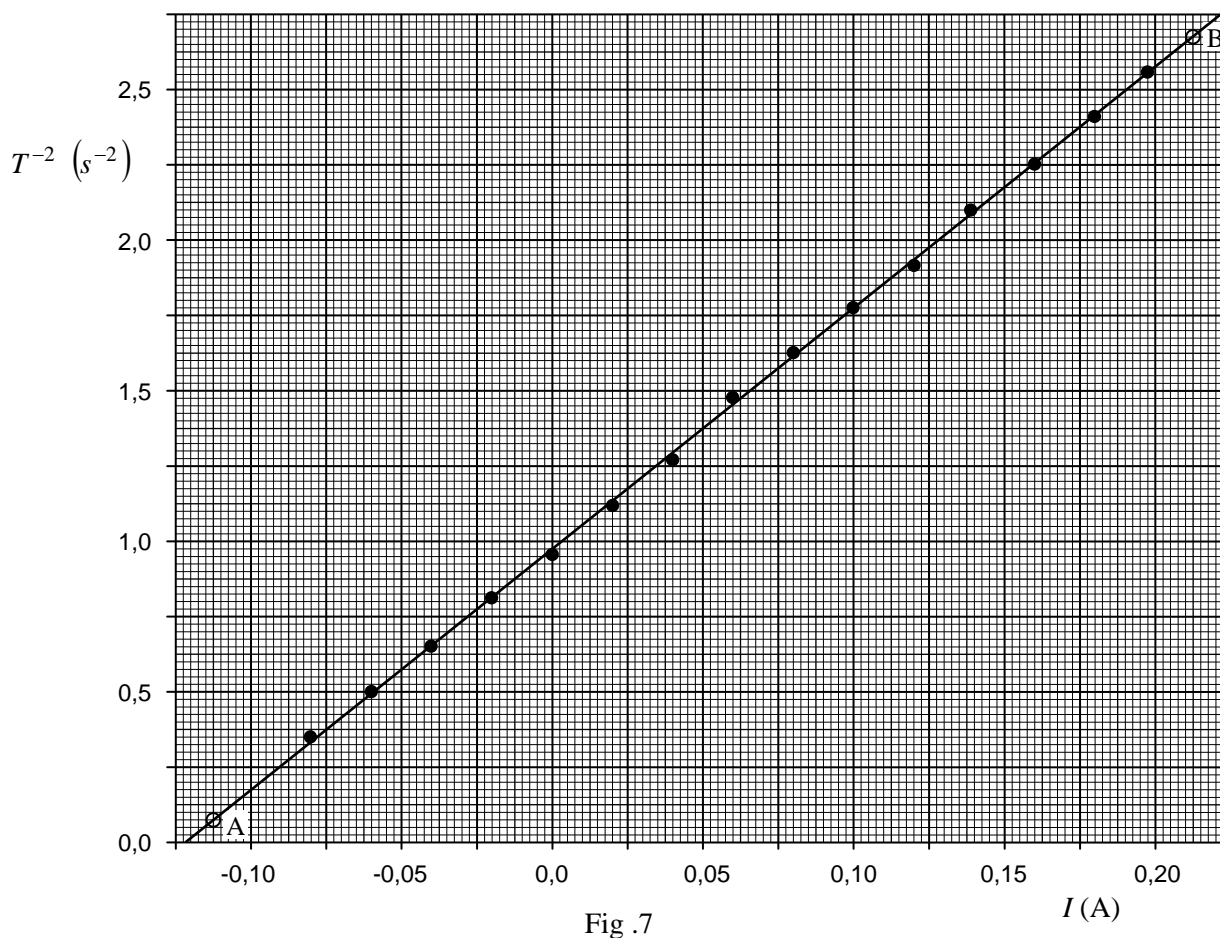
## Solución

- a) El periodo de oscilación puede medirse con buena precisión cronometrando el tiempo de, por ejemplo, diez oscilaciones completas de la brújula, tras darle un pequeño impulso torsional. La incertidumbre de esta medida puede estimarse en 0,1 s, de forma que la incertidumbre del periodo  $T$  es del orden de 0,01 s. Esta incertidumbre puede reducirse aumentando el número de oscilaciones de la medida o realizando varias medidas y promediando.

En la siguiente tabla se recogen los valores de  $T$  y  $1/T^2$ , que se necesitarán más adelante, medidos a intervalos aproximadamente regulares de 20 mA entre  $I = -80$  mA e  $I = 200$  mA. Los valores presentados son el promedio de cuatro medidas de diez oscilaciones.

$I$ (mA)	-80,5	-59,8	-40,1	-20,4	0,0	20,1	40,1	60,2	80,2	100,1	120,2	138,8	160,3	180,3	197,4
$T$ (s)	1,703	1,415	1,238	1,107	1,025	0,945	0,887	0,822	0,785	0,750	0,722	0,690	0,666	0,644	0,625
$1/T^2$ (s <sup>-2</sup> )	0,345	0,499	0,653	0,816	0,952	1,120	1,271	1,480	1,623	1,778	1,918	2,100	2,255	2,411	2,560

- b) Las medidas con intensidades negativas ya se han presentado en la tabla anterior.
- c) A continuación, en la figura 7 se presenta la gráfica pedida, con el aspecto que tendría dibujada en papel milimetrado.



- d) En la gráfica anterior también se ha trazado la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales. La pendiente,  $p$ , y la ordenada en el origen,  $y_0$ , de esta recta pueden determinarse a partir de las coordenadas de dos puntos de dicha recta. Para mejorar la precisión del resultado interesa tomar dos puntos alejados, por ejemplo los puntos A y B indicados en la gráfica, elegidos cerca de los extremos de la recta y coincidentes con cruces en la cuadrícula, para facilitar la lectura precisa de sus coordenadas.

$$(x_A; y_A) = (-0,1125 \text{ A}; 0,075 \text{ s}^2)$$

$$(x_B; y_B) = (0,2125 \text{ A}; 2,675 \text{ s}^2)$$

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \boxed{p = 8,00 \text{ s}^{-2}\text{A}^{-1}}$$

La ordenada en el origen de la recta puede deducirse de las coordenadas de uno de los puntos auxiliares (o también puede leerse directamente en la gráfica)

$$y_A = px_A + y_0 \Rightarrow y_0 = y_A - px_A \Rightarrow \boxed{y_0 = 0,975 \text{ s}^{-2}}$$

Nota: un ajuste analítico por el método de *mínimos cuadrados* conduce a un resultado muy similar:

$$p = 8,001 \text{ s}^{-2}\text{A}^{-1} \quad y_0 = 0,9736 \text{ s}^{-2}$$

- e) De acuerdo con las expresiones (3) y (5) del enunciado, se espera que la dependencia de  $1/T^2$  con  $I$  sea lineal, con pendiente y ordenada en el origen

$$p = \alpha K \frac{\mu_0 N}{2R} \Rightarrow K = \frac{2pR}{\mu_0 \alpha N}$$

$$y_0 = \alpha B_H \Rightarrow B_H = \frac{y_0}{\alpha}$$

Con los datos del enunciado y el valor del radio de las espiras<sup>4</sup>,  $R = 4,5 \text{ cm}$ , se obtiene

$$\boxed{K = 0,716}$$

$$\boxed{B_H = 2,44 \times 10^{-5} \text{ T}}$$

- f) Para hacer una estimación de la incertidumbre de la pendiente vamos a trazar las rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales (figura 8). Para ello hay que tener en cuenta la dispersión de los puntos respecto a la recta de mejor ajuste, que es nuestro caso es en promedio inferior al radio de los puntos dibujados. También es necesario tener en cuenta la incertidumbre estimada para los propios puntos experimentales. No vamos a tener en cuenta los posibles errores por falta de calibración del amperímetro, ya que no tenemos datos al respecto, pero sí podemos hacer una estimación de la incertidumbre de los valores de  $1/T^2$  obtenidos tras cronometrar el periodo de oscilación. Con el método de medida empleado (promedio de cuatro medidas de diez oscilaciones) una estimación razonable para la incertidumbre del periodo es

$$\Delta T = 0,005 \text{ s}$$

La incertidumbre de  $1/T^2$  puede calcularse numéricamente para cada punto a partir de los valores de  $T_{\max} = T + \Delta T$  y  $T_{\min} = T - \Delta T$  o, de una forma más elegante, tomando incrementos (en valor absoluto)

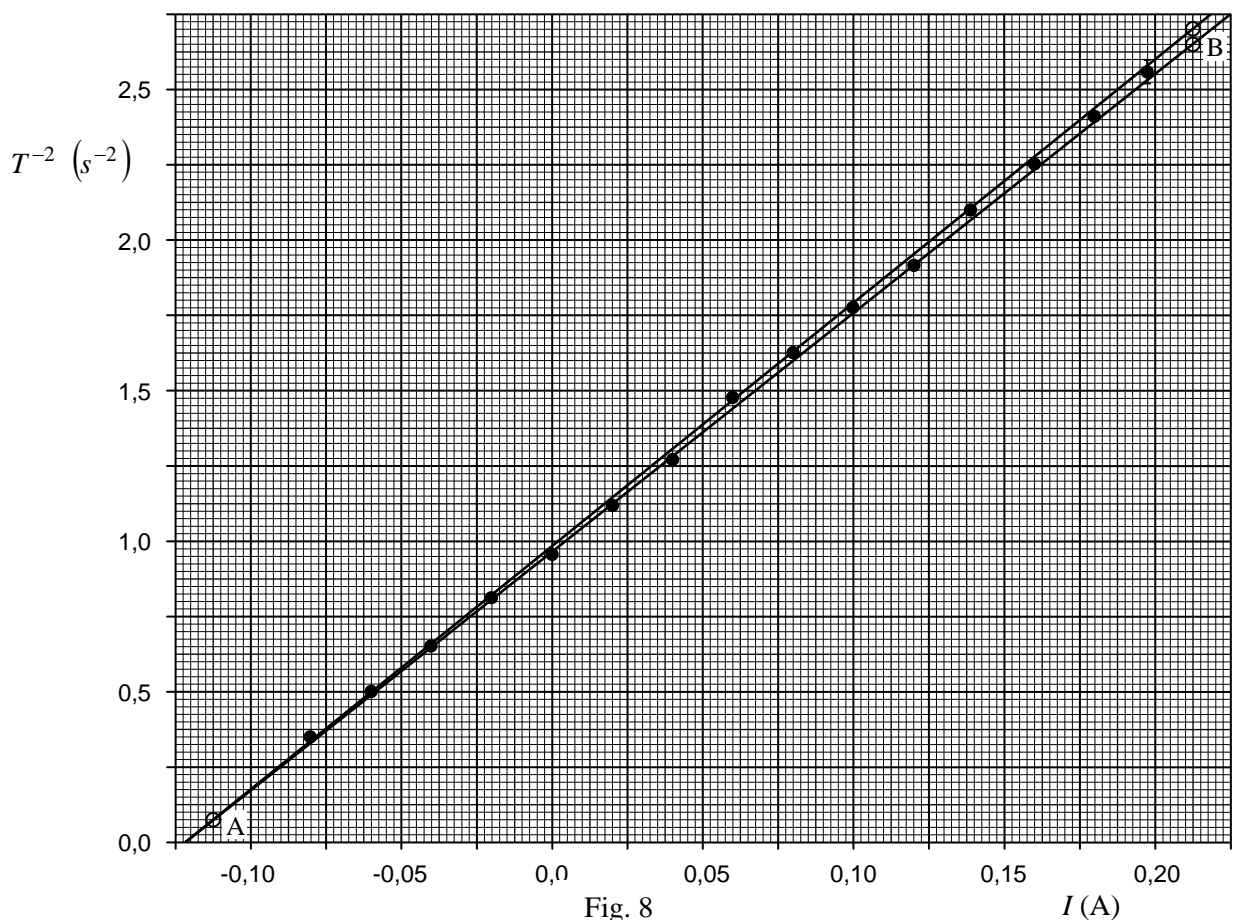
<sup>4</sup> Este es el radio del cilindro de metacrilato, que puede medirse con la regla con una incertidumbre del orden de 0,5 mm. El radio medio real de las espiras es algo superior debido al grosor de la cinta adhesiva y al diámetro del cable de cobre, que es de 0,3 mm. Esta pequeña fuente de error puede despreciarse frente a la incertidumbre de la constante  $\alpha$ .

$$\Delta\left(\frac{1}{T^2}\right) = 2 \frac{\Delta T}{T^3}$$

De una forma u otra es fácil comprobar que la incertidumbre de los primeros puntos, los correspondientes a corrientes negativas, es muy pequeña, inferior al tamaño de los puntos dibujados. Para corriente creciente la incertidumbre va aumentando y, por ejemplo, en el punto de corriente más alta alcanza el valor máximo

$$\Delta\left(\frac{1}{T^2}\right)_{I=197 \text{ mA}} = 0,04 \text{ s}^{-2}$$

En total, la "barra de error" del último punto no alcanza dos cuadritos a cada lado en la escala de la gráfica dibujada. Teniendo esto en cuenta, y la ya citada escasa dispersión de los puntos experimentales respecto a la recta óptima, es razonable considerar las rectas de pendientes máxima y mínima que a continuación se presentan, construidas manteniendo fijo el punto auxiliar A y con desviaciones de  $\pm 0,025 \text{ s}^2$  (un cuadrito) en la coordenada  $y_B$  del segundo punto auxiliar



Con este criterio, es inmediato obtener los valores máximo y mínimo estimados para la pendiente, y su incertidumbre<sup>5</sup>

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} = 8,08 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-1} \\ p_{\min} = 7,92 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-1} \end{array} \right\} \Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta p = 0,08 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-1}}$$

g) En el apartado e) se ha obtenido la constante  $K$  aplicando la expresión

<sup>5</sup> Un cálculo (no ponderado) da como resultado una incertidumbre  $\Delta p = 0,1 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-1}$  con un nivel de confianza del 95%.



$$K = \frac{2pR}{\mu_0 \alpha N}$$

Para calcular la incertidumbre de  $K$  es necesario "propagar" las incertidumbres de la pendiente  $p$  y de la constante  $a$ .

Un método sencillo y rápido, aunque no muy exacto, de calcular los valores máximo y mínimo de  $K$  consiste en ponerse en el "peor de los casos", es decir en combinar el valor máximo de  $p$  en el numerador con el mínimo de  $a$  en el denominador, y viceversa

$$\left. \begin{aligned} K_{\max} &= \frac{2p_{\max}R}{\mu_0 \alpha_{\min}N} = 0,742 \\ K_{\min} &= \frac{2p_{\min}R}{\mu_0 \alpha_{\max}N} = 0,692 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta K = 0,025$$

Como las dos fuentes de error consideradas son independientes, es más razonable, aunque también algo más laborioso, calcular independientemente sus influencias en la incertidumbre de  $K$

$$\Delta K_p = \frac{1}{2}(K_{\max} - K_{\min})_p = \frac{1}{2} \frac{2R}{\mu_0 \alpha N} (p_{\max} - p_{\min}) = \frac{2R}{\mu_0 \alpha N} \Delta p = K \frac{\Delta p}{p} = 0,007$$

$$\Delta K_\alpha = \frac{1}{2}(K_{\max} - K_{\min})_\alpha = \frac{1}{2} \frac{2pR}{\mu_0 N} \left( \frac{1}{\alpha_{\min}} - \frac{1}{\alpha_{\max}} \right) \approx \frac{2pR}{\mu_0 N} \frac{\Delta \alpha}{\alpha^2} = K \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = 0,018$$

Una estimación razonable de la incertidumbre total de  $K$  sería la suma de estas dos contribuciones

$$\Delta K = \Delta K_p + \Delta K_\alpha = 0,025$$

Pero, teniendo de nuevo en cuenta que las dos fuentes de error son independientes, es más correcto calcularla en la forma

$$\Delta K = \sqrt{\Delta K_p^2 + \Delta K_\alpha^2} = 0,019 \Rightarrow \boxed{\Delta K \approx 0,02}$$

El resultado final del experimento sería

$$\boxed{K = 0,72 \pm 0,02}$$

Nota 1: el valor de  $\Delta K_\alpha$  es bastante mayor que el de  $\Delta K_p$ . Por ello, al redondear como es habitual a una única cifra significativa el resultado final, desaparece prácticamente la influencia de  $\Delta p$ . En otras palabras, si se quisiese mejorar la precisión del valor de  $K$ , sería prioritario conocer  $a$  con menos incertidumbre.

Nota 2: el valor teórico de la constante  $K$ , supuesto que el cable conductor es muy delgado, es

$$K = \frac{8}{5^{3/2}} = 0,7155$$

h) La brújula se orienta en la dirección y sentido del campo magnético horizontal. En nuestro caso, cuando la corriente  $I$  es positiva, el campo de las bobinas  $B_C$  lleva el mismo sentido que el terrestre  $B_H$ , pero cuando la corriente  $I$  es negativa  $B_C$  lleva sentido opuesto a  $B_H$ . Mientras  $B_H > |B_C|$ , el campo total sigue llevando el sentido de  $B_H$  (esta es la región de corrientes negativas en la que se ha medido). Pero para una corriente negativa suficientemente intensa  $|B_C|$  superará a  $B_H$  y el campo resultante tendrá sentido inverso, por lo que la brújula girará  $180^\circ$  y se orientará, en equilibrio, en sentido opuesto al inicial.

Cuando el campo total es muy débil, el movimiento de la brújula está influido apreciablemente por el momento de torsión del hilo del que cuelga. Por ejemplo, si el hilo está inicialmente retorcido, la brújula empieza a girar y parece volverse loca.

El punto de inversión corresponde obviamente a campo total nulo. Teniendo en cuenta la expresión (5) del enunciado, esto ocurre para una corriente  $I_0$  que cumpla

$$B = B_H + K \frac{\mu_0 N}{2R} I_0 = 0 \Rightarrow I_0 = -\frac{2RB_H}{K\mu_0 N} \Rightarrow \boxed{I_0 = -0,122 \text{ A}}$$

Este valor también puede leerse directamente en la gráfica de  $1/T^2$  frente a  $I$ , en el punto de corte de la recta de ajuste con el eje de abscisas, pues según (3)  $B = 0$  implica  $1/T^2 = 0$ .