P2. Tablón oscilante.

Se coloca un tablón delgado y homogéneo, de masa M y longitud L, sobre un par de rodillos que giran con la misma velocidad angular constante, pero en sentidos opuestos. En la figura 1 se muestra este sistema cuando el tablón está colocado simétricamente respecto a los rodillos. La distancia entre los ejes de los rodillos es b y el coeficiente de rozamiento entre el tablón y dichos rodillos es μ.

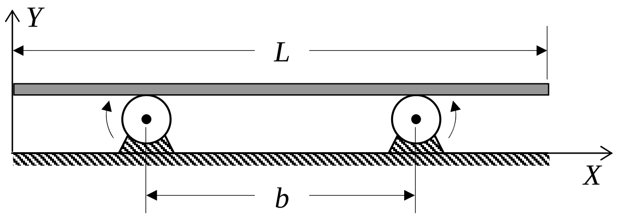

Fig. 1

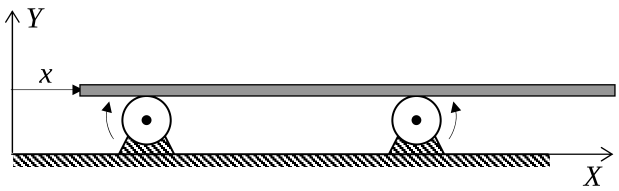

Fig. 2

a) Cuando el tablón se aparta una distancia x de la posición simétrica, como se representa en la figura 2, dibuje un diagrama en el que se muestren las fuerzas que actúan sobre el tablón.

b) Demuestre que el tablón permanece en equilibrio si se coloca exactamente en la posición simétrica respecto a los cilindros ($x = 0$).

Cuando el tablón se libera en una posición como la representada en la figura 2, es decir separado una distancia x de la posición de equilibrio, realiza un movimiento oscilatorio armónico. Se supone que la velocidad angular de los rodillos es lo suficientemente elevada para que en ningún momento el tablón deje de deslizar sobre ellos.

c) Determine el periodo T de las oscilaciones del tablón.

Estando el tablón en la posición de equilibrio, se le aplica un impulso horizontal de magnitud I, de forma que empieza a oscilar en torno a dicha posición de equilibrio.

d) Determine el máximo impulso que se puede aplicar al tablón, I_{max}, para que permanezca siempre apoyado sobre los dos rodillos.

Solución

Las fuerzas que actúan sobre el tablón son las representadas en la figura 3. Como en todo momento existe deslizamiento entre el tablón y los rodillos, el módulo de cada fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo:

$$F_{r1} = \mu N_1 \quad \text{y} \quad F_{r2} = \mu N_2$$

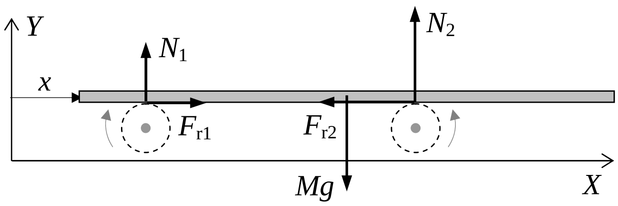

Fig. 3

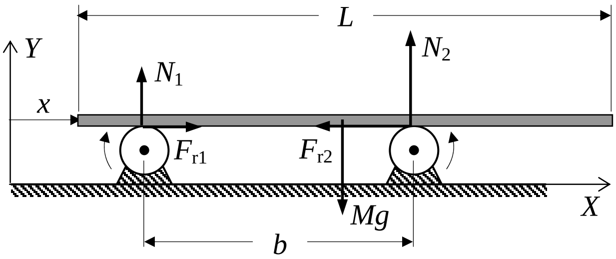

Fig. 4

a) En la posición simétrica ($x = 0$) las reacciones normales son iguales: $N_1 = N_2 = Mg/2$, por lo que las fuerzas de rozamiento (máximas puesto que existe deslizamiento) tienen el mismo módulo y, al ser de sentidos opuestos, la fuerza resultante horizontal es nula. En consecuencia el tablón permanece en equilibrio.

b) Si el tablón se aparta una distancia x de la posición de equilibrio, como se indica en la figura 4, las reacciones normales dejan de ser iguales, y por consiguiente las fuerzas de rozamiento. La fuerza neta horizontal que actúa sobre el tablero es

$$F_x = F_{r1} - F_{r2} = \mu\left(N_1 - N_2\right) \qquad (1)$$

Para determinar esta fuerza es necesario conocer el valor de las fuerzas normales. En primer lugar,

$$N_1 + N_2 = Mg \qquad (2)$$

Por otra parte, como el tablón solo se desplaza horizontalmente, el momento de las fuerzas exteriores tiene que ser cero, respecto a cualquier punto. En particular, respecto al centro de masas del tablón, se puede escribir

$$N_1\left(\frac{b}{2} + x\right) = N_2\left(\frac{b}{2} - x\right) \qquad (3)$$

De (2) y (3) se deduce que

$$N_1 = Mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{b}\right) \qquad N_2 = Mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{b}\right)$$

Y, por tanto, la fuerza horizontal (1) sobre el tablón es

$$F_x = -\frac{2\mu M g}{b}\, x$$

y la aceleración con que se mueve viene dada por

$$a = -\frac{2\mu g}{b}\, x \qquad (4)$$

A la vista de la expresión (4) se deduce inmediatamente que el movimiento del tablón es oscilatorio armónico, independiente de la masa del tablón y con una pulsación y un periodo dados por

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{b}} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{2\mu g}}}$$

c) Dado que el tablón realiza un movimiento oscilatorio armónico, su elongación y su velocidad son

$$x(t) = A\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \qquad \text{(5a)}$$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{(5b)}$$

siendo A la amplitud y φ la fase en $t = 0$, cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del movimiento.

De acuerdo con el enunciado, el tablón está inicialmente en reposo (posición de equilibrio) y se pone en movimiento mediante un impulso horizontal I. Como el impulso es igual a la variación del momento lineal del sistema, se tiene

$$I = M\, v_0$$

donde v_0 es la velocidad con que comienza a desplazarse el tablón.

Por lo tanto, las condiciones iniciales son

$$x(t=0) = 0$$

$$v(t=0) = v_0$$

Aplicando estas condiciones en (5a) y (5b), se deduce que

$$0 = A\mathrm{sen}\,\varphi \quad \text{y} \quad v_0 = \omega A \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = \omega A \qquad \text{(6)}$$

Si la longitud del tablón es L, para que al oscilar permanezca siempre apoyado sobre los dos rodillos la máxima amplitud de sus oscilaciones, tiene que cumplir la relación (figura 5)

$$2A_{\max} + b = L \quad \Rightarrow \quad A_{\max} = \frac{L-b}{2} \qquad \text{(7)}$$

En consecuencia, la velocidad inicial máxima es

$$v_0 = \omega \frac{L-b}{2}$$

Finalmente, el impulso máximo que se podrá aplicar es

$$I_{\max} = M\omega \frac{L-b}{2}$$

y teniendo en cuenta el valor de ω queda

$$\boxed{I_{\max} = \frac{1}{2} M (L-b) \sqrt{\frac{2\mu g}{b}}}$$

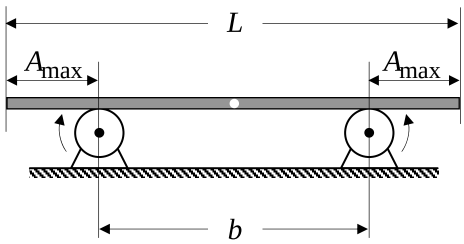

Fig. 5