

## P2. Las mareas oceánicas.

### Introducción.

La marea es el movimiento periódico de ascenso y descenso de las aguas del mar, producido por las perturbaciones gravitatorias del Sol y de la Luna en la Tierra. Su frecuencia es de dos veces por día aproximadamente, y su amplitud, que también varía de día a día, depende de la fase de la Luna, siendo máxima con *luna llena* o *luna nueva*. En estos casos, se dice que hay *mareas vivas* (o *sizigias*). Cuando la marea sube y llega a su máximo nivel se dice que se ha alcanzado la *pleamar*; cuando a continuación desciende y llega al mínimo se llama *bajamar*. La *amplitud de marea* es la diferencia entre los niveles de pleamar y bajamar.

Isaac Newton, en 1687, dio la explicación científica de las mareas en su obra “*Principia Mathematica*”, constituyendo un importante éxito de su teoría de la Gravitación, ya que permitió una acertada predicción cualitativa de las mareas en cualquier época del año y en cualquier latitud.

Sin embargo, en el cálculo de la amplitud de marea la teoría newtoniana se queda notablemente corta, pues predice una máxima amplitud del orden de medio metro, muy inferior a los registros experimentales reales. Por ejemplo, en Europa son famosas las mareas en las costas del Canal de la Mancha, en las que la amplitud de marea puede alcanzar los 15 m. En particular, son especialmente espectaculares las mareas en la abadía del Mont Saint Michel. En pleamar es una isla (figura 1) y, debido a la escasa pendiente de la playa, en marea baja el mar se aleja varios kilómetros y la abadía queda “en seco” (figura 2). En España las mayores alturas de marea se registran en el puerto de Pasajes (San Sebastián), donde se superan los 5 m.



Fig. 1



Fig. 2

Por otra parte, las grandes olas rompiendo en la costa son espectaculares, pero sus consecuencias pueden ser catastróficas. Durante el pasado invierno, el norte de España ha sufrido los estragos de sucesivos temporales, siendo el poder destructor de las olas mucho mayor en pleamar, y aun más cuando las mareas son vivas, como ha sucedido en alguno de estos temporales.

El estudio del fenómeno de las mareas es muy complejo. Intervienen muchos parámetros que no pueden contemplarse en el planteamiento newtoniano. Por ejemplo, depende de la forma y características de la costa, de si el mar es interior, de factores climáticos ocasionales, etc. El estudio cuantitativo se realiza considerando las mareas como un fenómeno ondulatorio, en muchos casos resonante. Pero el origen del fenómeno es gravitatorio, y algunos de sus aspectos van a ser tratados en este ejercicio.

### El problema de dos cuerpos que interaccionan gravitatoriamente y orbitan en torno a su centro de masas.

Consideremos dos cuerpos esféricos, de masas  $M_1$  y  $M_2$  que giran en torno a su centro de masas (C.M.) con velocidad angular  $\omega$ . La separación entre los centros de las esferas es  $R$ , y las distancias del C.M. a dichos centros son  $R_1^*$  y  $R_2^*$ , como se muestra en la figura 3. Estas distancias vienen dadas por

$$R_1^* = \frac{M_2}{M_1 + M_2} R$$

$$R_2^* = \frac{M_1}{M_1 + M_2} R$$

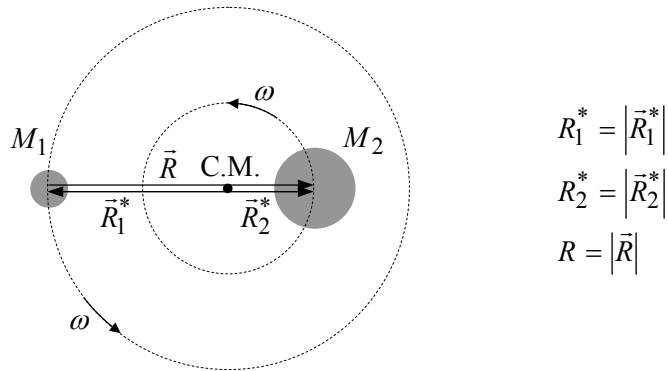


Fig. 3

$$R_1^* = |\vec{R}_1^*|$$

$$R_2^* = |\vec{R}_2^*|$$

$$R = |\vec{R}|$$

Supuesto que los dos cuerpos esféricos interaccionan gravitatoriamente,

- Determine la expresión de la velocidad angular,  $\omega$ , con que giran en torno al C.M.
- Si el cuerpo 1 es la Luna y el 2 es la Tierra, con los datos que figuran al final del enunciado, calcule el valor de  $\omega$ .
- La Luna gira en torno a su eje, que es perpendicular al plano de la figura 3, de forma que, vista desde la Tierra, la Luna presenta siempre la misma cara. ¿Cuál es su periodo de rotación,  $T_L$ , expresado en días?

### La generación de las mareas.

Como modelo físico consideraremos una Tierra esférica, de masa  $M_T$ , completamente cubierta por una delgada capa de agua (hidrosfera). Supondremos la existencia de un astro próximo de masa  $M$  (que más adelante identificaremos primero con la Luna y después con el Sol). Ambos cuerpos giran en torno a su C.M. con la velocidad angular  $\omega$  determinada en el apartado (a). De momento, no tendremos en cuenta la velocidad angular de rotación de la Tierra en torno a su eje Norte-Sur,  $\omega_T$ .

Empleando la notación que se indica en la figura 4, se puede demostrar que la fuerza que actúa sobre una partícula de fluido de la hidrosfera, de masa  $m$ , viene dada por la expresión<sup>1</sup>

$$\vec{F}_m = -G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{M m}{d^3} \vec{d} + G \frac{M m}{R^3} \vec{R} \quad (1)$$

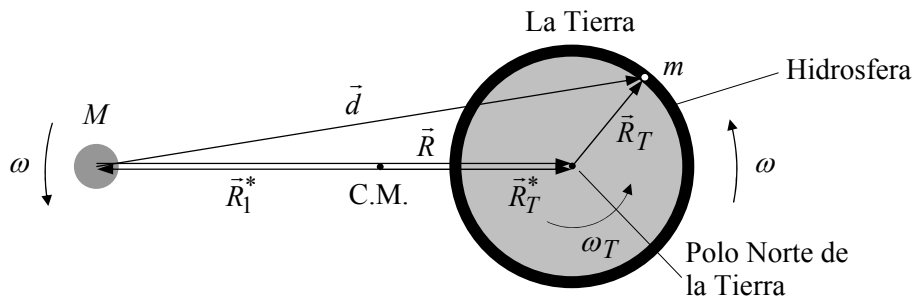


Fig. 4

Los dos primeros términos de (1) corresponden, respectivamente, a la atracción gravitatoria de la propia Tierra y de  $M$  sobre la partícula  $m$ . El tercer término describe el efecto centrífugo producido por la rotación del sistema en torno al C.M.

Como  $R = |\vec{R}|$  y  $d = |\vec{d}|$  son mucho mayores que el radio de la Tierra,  $R_T = |\vec{R}_T|$ , el primer término de (1) es mucho mayor que los otros dos. Si se despreciasen estos dos términos, la expresión (1) se reduciría al “peso” de la partícula  $m$ , radial y uniforme en cualquier punto de la hidrosfera (figura 5). Con esta aproximación, la hidrosfera tendría simetría esférica y ¡no existirían las mareas!

<sup>1</sup> El vector unitario  $\vec{u}$  que define la dirección y sentido de un vector  $\vec{A}$ , frecuentemente se escribe  $\vec{u} = \vec{A}/|\vec{A}| = \vec{A}/A$

En consecuencia, el origen de las mareas radica en los términos segundo y tercero de (1). Llamaremos *fuerza generadora de mareas* (fgm) a la fuerza por unidad de masa correspondiente a estos dos términos:

$$\vec{f} = GM \left( \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right)$$

La fuerza  $\vec{f}$  “tira” de las partículas de la hidrosfera en la forma que, exagerada y aproximadamente, se muestra en la figura 6. Esta distribución de fuerzas provoca una ligera deformación de la hidrosfera, que también se muestra exagerada en la figura 6. Obsérvese que en los puntos A y A' el nivel del agua es mayor que en B y B'. En A y A' habrá *pleamar*, mientras que en B y B' habrá *bajamar*.

Suponga que el astro de masa  $M$  es la Luna, es decir,  $M = M_L$ . Teniendo en cuenta las dimensiones reales del sistema, y haciendo las aproximaciones que crea oportunas,

- d) Determine, en función de  $G$ ,  $M_L$ ,  $R_{LT}$  y  $R_T$ , las expresiones de los módulos de la fgm en los puntos A y B,  $(f_L)_A$  y  $(f_L)_B$ , respectivamente.

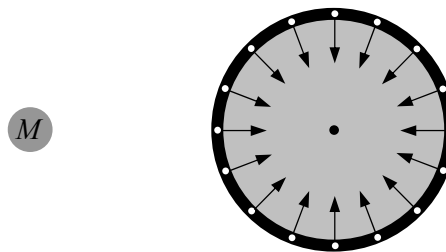


Fig. 5

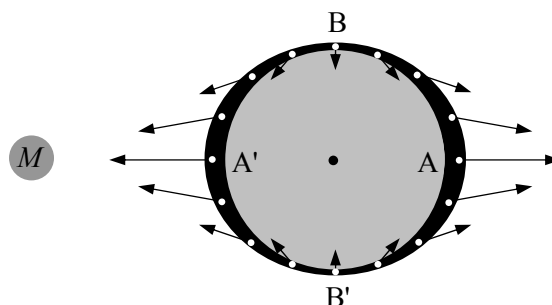


Fig. 6

### Las influencias del Sol y de la Luna.

La masa de la Luna es mucho menor que la del Sol, pero está mucho más cerca de la Tierra. Por ello ambos contribuyen a la formación de las mareas. Esto es un “privilegio” de la Tierra: es el único caso del sistema solar en el que dos astros compiten en las mareas de un tercero.

- e) Suponiendo ahora que el astro de masa  $M$  es el Sol ( $M = M_S$ ), determine la expresión del módulo de la fgm en el punto A,  $(f_S)_A$ , en función de  $G$ ,  $M_S$ ,  $R_{ST}$  y  $R_T$ . Como en el apartado anterior, haga las aproximaciones que crea oportunas.
- f) Usando los datos del final del enunciado, calcule el valor del cociente  $(f_L)_A / (f_S)_A$ .
- g) En el enunciado se indica que las mareas vivas se producen con luna nueva o luna llena. ¿Por qué?

### El periodo de las mareas.

Vamos a ampliar nuestro modelo, considerando que la Tierra gira en torno a su eje Norte-Sur, perpendicular al plano de la figura 4, con una velocidad angular  $\omega_T$  (periodo  $T_T = 24$  h).

En el punto A de la figura 6, existe marea alta, tal como se ha indicado anteriormente. Al cabo de 12 h, debido a la rotación terrestre, el punto A ocupará el lugar A'. Pero en A' no se habrá alcanzado todavía la pleamar porque durante esas 12 horas el sistema Tierra-Luna habrá girado un cierto ángulo en torno al centro de masas y, por tanto, el punto A' no estará alineado con los centros de la Luna y de la Tierra. Será preciso esperar un poco más de tiempo para que se alineen y se alcance la siguiente marea alta.

- h) Calcule el periodo  $\tau$  de las mareas lunares.

### Datos:

Masas de la Tierra, la Luna y el Sol,  $M_T = 5,98 \times 10^{24}$  kg,  $M_L = 7,36 \times 10^{22}$  kg,  $M_S = 1,99 \times 10^{30}$  kg.

Distancia Luna-Tierra,  $R_{LT} = 3,84 \times 10^8$  m. Distancia Sol-Tierra,  $R_{ST} = 1,50 \times 10^{11}$  m.

Radio de la Tierra,  $R_T = 6,37 \times 10^6$  m. Constante de Gravitación Universal,  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>kg<sup>-2</sup>.

### Solución

- a) Consideremos uno de los dos cuerpos de la figura 3, por ejemplo el de masa  $M_2$ . Su centro describe una órbita circular de radio  $R_2^*$  con una velocidad angular constante  $\omega$ , bajo la acción de la fuerza de atracción gravitatoria del astro de masa  $M_1$ . Por tanto

$$G \frac{M_1 M_2}{R^2} = M_2 \omega^2 R_2^* \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = G \frac{M_1}{R_2^* R^2}$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $R_2^*$ , se obtiene

$$\boxed{\omega = \left( G \frac{M_1 + M_2}{R^3} \right)^{1/2}} \quad (2)$$

- b) En el caso del sistema Tierra-Luna,

$$M_1 \equiv M_L, \quad M_2 \equiv M_T, \quad R \equiv R_{LT}$$

Se obtiene

$$\boxed{\omega = 2,67 \times 10^{-6} \text{ rad/s}}$$

- c) Como la Luna vista desde la Tierra presenta siempre la misma cara, la velocidad angular de rotación en torno a su eje tiene que ser la misma que la de rotación del sistema Tierra-Luna en torno al C.M. En consecuencia, el periodo de rotación de la Luna es

$$T_{Luna} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_L = 2,35 \times 10^6 \text{ s} = 27,2 \text{ días}}$$

- d) En el sistema Tierra-Luna, la fgm en el punto A de la figura 6 es

$$\left( \vec{f}_L \right)_A = GM_L \left( \frac{\vec{R}_{LT}}{R_{LT}^3} - \frac{\vec{d}_A}{d_A^3} \right) \quad (3)$$

Como todos los vectores que aparecen en la expresión (3) tienen la misma dirección, el módulo de la fgm en A es

$$(f_L)_A = GM_L \left( \frac{1}{R_{LT}^2} - \frac{1}{d_A^2} \right) = GM_L \frac{d_A^2 - R_{LT}^2}{R_{LT}^2 d_A^2} = GM_L \frac{(d_A - R_{LT})(d_A + R_{LT})}{R_{LT}^2 d_A^2}$$

Teniendo en cuenta las dimensiones reales del sistema, tal como sugiere el enunciado,  $R_T \ll R_{LT}$ . Por tanto  $d_A = R_{LT} + R_T \approx R_{LT}$ , por lo que  $d_A + R_{LT} \approx 2R_{LT}$ . Además,  $d_A - R_{LT} = R_T$ . Con todo ello

$$\boxed{(f_L)_A \approx GM_L \frac{2R_T}{R_{LT}^3}} \quad (4)$$

La fgm en el punto B es

$$\left( \vec{f}_L \right)_B = GM_L \left( \frac{\vec{R}_{LT}}{R_{LT}^3} - \frac{\vec{d}_B}{d_B^3} \right)$$

Ahora los vectores  $\vec{R}_{LT}$  y  $\vec{d}_B$  no son paralelos, como puede apreciarse en la figura 7. Es preciso determinar las componentes de la  $\left( \vec{f}_L \right)_B$  en las direcciones paralela y perpendicular a  $\vec{R}_{LT}$ .

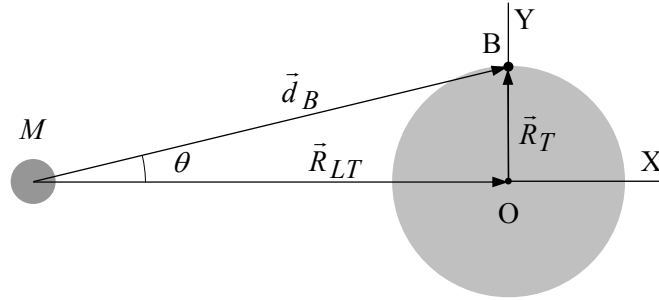


Fig. 7

En la dirección OX

$$[(\vec{f}_L)_B]_x = GM_L \left( \frac{1}{R_{LT}^2} - \frac{(\vec{d}_B)_x}{d_B^3} \right), \text{ donde } (\vec{d}_B)_x = d_B \cos \theta \approx d_B$$

$$[(\vec{f}_L)_B]_x = GM_L \left( \frac{1}{R_{LT}^2} - \frac{1}{d_B^2} \right)$$

Como  $d_B \approx R_{LT}$  resulta  $[(\vec{f}_L)_B]_x \approx 0$ .

En cuanto a la componente según OY

$$[(\vec{f}_L)_B]_y = GM_L \left( 0 - \frac{(\vec{d}_B)_y}{d_B^3} \right)$$

Como  $(\vec{d}_B)_y = d_B \operatorname{sen} \theta \approx d_B \operatorname{tg} \theta = d_B \frac{R_T}{R_{LT}}$

$$[(\vec{f}_L)_B]_y = -GM_L \frac{R_T}{R_{LT} d_B^2} \approx -GM_L \frac{R_T}{R_{LT}^3}$$

En definitiva, la  $(\vec{f}_L)_B$  está aproximadamente dirigida hacia el centro de la Tierra, y su módulo es

$$(f_L)_B \approx GM_L \frac{R_T}{R_{LT}^3}$$

e) Considerando ahora sistema Sol-Tierra, la  $(f_S)_A$  vendrá dada por

$$(f_S)_A = GM_S \left( \frac{1}{R_{ST}^2} - \frac{1}{d_A^2} \right) = GM_S \frac{(d_A - R_{ST})(d_A + R_{ST})}{R_{ST}^2 d_A^2}$$

Los razonamientos para aproximar y escribir  $(f_S)_A$  en función de  $G$ ,  $M_S$ ,  $R_{ST}$  y  $R_T$  son idénticos a los del apartado (d). Basta cambiar el subíndice L por S, por lo que se tiene

$$(f_S)_A \approx GM_S \frac{2R_T}{R_{ST}^3} \quad (5)$$

f) Dividiendo (4) y (5) se obtiene el cociente buscado

$$\frac{(f_L)_A}{(f_S)_A} \approx \frac{M_L}{M_S} \left( \frac{R_{ST}}{R_{LT}} \right)^3$$

Con los datos numéricos del enunciado,

$$\frac{(f_L)_A}{(f_S)_A} = 2,2$$

La influencia de la Luna es aproximadamente el doble que la del Sol, pero ambas son del mismo orden de magnitud.

- g) Lógicamente, cuando el Sol, la Luna y la Tierra estén alineados, las fgm tienen el mismo sentido en A, y sus módulos se suman. Por tanto, las correspondientes mareas son las más intensas (vivas). Esto ocurre sólo cuando hay luna llena o luna nueva.

Las mareas menos intensas ocurren cuando la pleamar lunar coincide con la bajamar solar, es decir, cuando las visuales desde la Tierra al Sol y a la Luna formen un ángulo de  $90^\circ$ . Las correspondientes mareas se denominan *muertas o de cuadratura* y las fases de la luna correspondientes son *cuarto creciente o cuarto menguante*.

- h) Para que en el punto A (figura 7a) vuelva a haber pleamar, es necesario que este punto esté nuevamente alineado con los centros de la Luna y de la Tierra. Podría pensarse que el tiempo que transcurre entre dos pleamars consecutivas es de 12 h, pues en este tiempo el punto A alcanza la posición A', pero será preciso esperar un poco más porque, mientras tanto, la Luna ha seguido girando en torno al C.M. Para que vuelvan a estar alineados, la Tierra tiene que haber girado un ángulo  $\pi + \varphi$ , como se indica en la figura 7b, donde  $\varphi$  es el ángulo girado por la Luna durante el mismo tiempo,  $\tau$ , hasta el nuevo alineamiento. Si  $\omega_T$  es la velocidad angular de rotación de la Tierra en torno a su eje Norte-Sur, se cumple

$$\pi + \varphi = \omega_T \tau$$

$$\varphi = \omega \tau$$

Eliminando  $\varphi$  entre estas dos ecuaciones y despejando  $\tau$ , se obtiene

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_T - \omega}$$

Como  $\omega = 2,67 \times 10^{-6}$  rad/s y  $\omega_T = 2\pi / (24 \text{ h}) = 7,27 \times 10^{-5}$  rad/s, resulta finalmente que el periodo de las mareas es

$$\tau = 4,48 \times 10^4 \text{ s} = 12 \text{ h } 27 \text{ min}$$

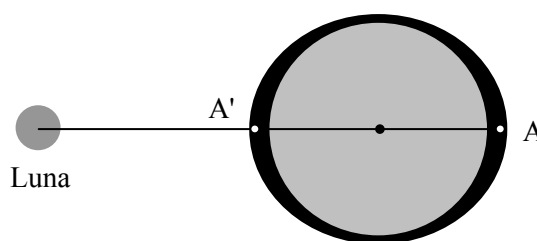


Fig. 7a

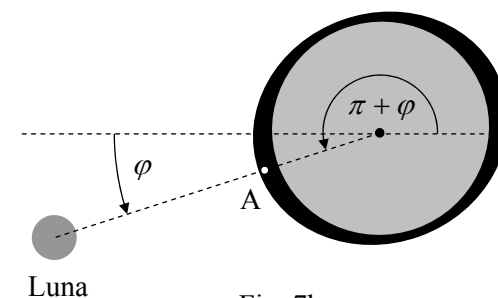


Fig. 7b

## Apéndice

La deducción de la expresión (1) está fuera del contexto “olímpico”. No obstante, merece ser incorporada a la solución de este ejercicio.

La ecuación del movimiento de una masa  $m$  sometida a una fuerza de ligadura  $\vec{F}_l$  (reacción normal de empuje hidrostático) y a las fuerzas gravitatorias de un astro de masa  $M$  y de la Tierra es

$$-G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{Mm}{d^3} \vec{d} + \vec{F}_l = m \vec{a} \quad (4)$$

En la que  $\vec{a}$  es la aceleración de la partícula, referida a un sistema de referencia inercial centrado en el C.M. y no representado en la figura 8.

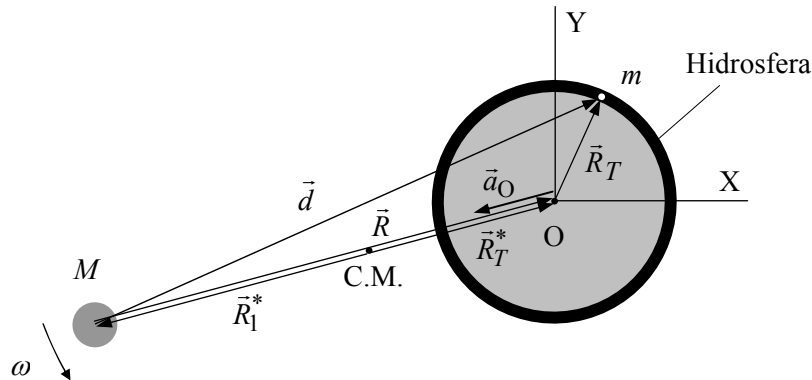


Fig. 8

Consideraremos también otro sistema de referencia OXY, con origen O en el centro de la Tierra, que describe una trayectoria circular de radio  $R_T^*$ , pero cuyos ejes mantienen siempre su orientación en el espacio. Este sistema es no inercial, pues su origen está acelerado.

La relación general entre las aceleraciones referidas a dos sistemas, uno inercial y otro no inercial, es

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}') + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$$

Donde

$\vec{a}_0$  : aceleración del origen del sistema de referencia no inercial (N.I.).

$\vec{\Omega}$  : velocidad angular de rotación del sistema N.I..

$2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$  : aceleración de Coriolis. ( $\vec{v}'$  es la velocidad de la partícula respecto al sistema N.I.)

$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}')$  : aceleración centrípeta.

En el caso que nos ocupa,

- La partícula está en reposo en el sistema N.I.:  $\vec{a}' = 0$  y  $\vec{v}' = 0$ .
- El sistema N.I. no es giratorio:  $\dot{\vec{\Omega}} = 0$  y  $\vec{\Omega} = 0$ .
- El centro O del sistema describe un circunferencia de radio  $R_T^*$  con una velocidad angular  $\omega$ :

$$\vec{a}_0 = -\omega^2 \vec{R}_T^*$$

En este caso, la expresión (4) se reduce a

$$-G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{Mm}{d^3} \vec{d} + \vec{F}_l = -m \omega^2 \vec{R}_T^*$$

O lo que es lo mismo,

$$\vec{F}_l + \left( -G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{Mm}{d^3} \vec{d} + m \omega^2 \vec{R}_T^* \right) = \vec{0}$$

La fuerza  $\vec{F}_m$  que, “tira” de  $m$ , y que está equilibrada con la de ligadura, es

$$\vec{F}_m = -G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R}_T - G \frac{Mm}{d^3} \vec{d} + m \omega^2 \vec{R}_T^* \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{R}_T^* = \frac{M}{M + M_T} \vec{R} \quad \text{y} \quad \omega^2 = G \frac{M + M_T}{R^3}$$

y sustituyendo en (5), resulta finalmente la expresión (1) del enunciado.

$$\vec{F}_m = -G \frac{M_T m}{R_T^3} \vec{R} - G \frac{M m}{d^3} \vec{d} + G \frac{M m}{R^3} \vec{R}$$