

### P3.- El máser<sup>1</sup>

El término MÁSER es el acrónimo de *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. El máser es el precursor del máser óptico o LÁSER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*), que funciona de forma similar, pero emitiendo luz visible.

En este problema vamos a estudiar algunos aspectos del primer máser construido por Townes y sus colaboradores Gordon y Zeiger en 1955. Se trata de un máser de amoníaco, un aparato que rezuma física por todas partes.

#### Funcionamiento

El máser y el láser están basados en el fenómeno de *emisión estimulada de radiación*, estudiado por Albert Einstein en 1916: Cuando una molécula se halla en un estado *excitado*, de energía  $E_2$  mayor que la de su estado *fundamental*,  $E_1$ , puede producirse la transición espontánea del nivel excitado al fundamental, emitiendo un fotón cuya frecuencia corresponde al salto energético  $\Delta E = E_2 - E_1$  entre los dos niveles.

Pero si un fotón de esa misma frecuencia incide sobre una molécula en el estado excitado, se puede inducir o *estimular* la transición al fundamental, resultando dos fotones de la misma frecuencia, el incidente más el emitido. Cuando el fenómeno ocurre dentro de una cavidad de paredes reflectoras (*cavidad resonante*), se desencadena una cascada de emisiones estimuladas y se amplifica la radiación inicial, siempre que dentro de la cavidad se mantenga de alguna forma la población de moléculas excitadas. Un orificio en la cavidad resonante deja salir parte de la radiación (microondas en el máser o luz en el láser) en forma de un haz estable, unidireccional y muy monocromático, es decir de una frecuencia bien determinada.

#### El máser de amoníaco de Townes

La molécula de amoníaco puede tener dos estados de energía dependiendo de su orientación espacial respecto al sentido de rotación de la molécula. Para la rotación mostrada en las figuras 1.a y 1.b, se presenta el estado 1 de menor energía cuando el átomo de nitrógeno está por debajo de los átomos de hidrógeno, y el estado 2 de mayor energía cuando el nitrógeno está por encima. Estos dos niveles son muy próximos: la diferencia de energía entre ellos es tan sólo  $\Delta E = 9,84 \times 10^{-5}$  eV, lo que explica que la radiación emitida en la transición sea de microondas (figura 1.c).

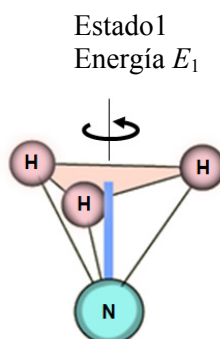


Fig. 1.a

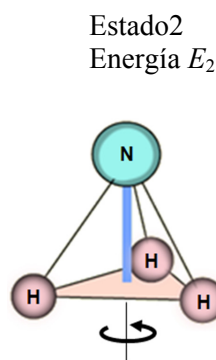


Fig. 1.b

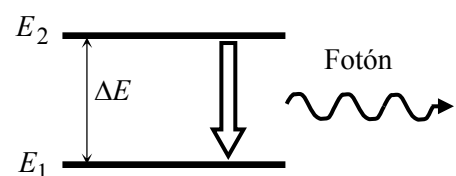
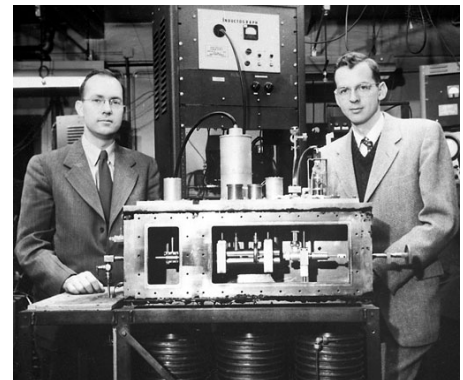


Fig. 1.c



Charles Townes (izquierda) con su colaborador en la Universidad de Columbia James Gordon, y el primer máser (1955).

<sup>1</sup> Este problema es un homenaje a Charles Townes, que falleció el 27 de enero de este año. Fue laureado con el premio Nobel de Física en 1964 por la invención del máser y por los primeros desarrollos del láser.

- a) Calcule la frecuencia de la radiación emitida en la transición entre los estados 2 y 1.

Datos: carga elemental  $e=1,60 \times 10^{-19}$  C ; constante de Planck  $h=6,63 \times 10^{-34}$  J.s .

- b) El máser de Townes emitía con una potencia de  $10^{-10}$  W. ¿Cuántas moléculas efectivas de amoníaco emitían radiación en cada segundo?

El máser es un oscilador extraordinariamente estable y monocromático, por lo que sirvió como patrón para la fabricación de los primeros relojes atómicos. La frecuencia de la radiación emitida por el máser de amoníaco tiene una incertidumbre (ancho de banda) de tan solo 75 Hz.

- c) Haga una estimación del número de años que han de transcurrir para que el reloj acumule un error de 1 s.

Un tanque de amoníaco suministra las moléculas al aparato. A temperatura ambiente, los dos estados están prácticamente igual de poblados, es decir, la mitad de las moléculas está en cada uno de estos estados. Para que la emisión estimulada domine sobre la absorción de radiación, y por tanto haya amplificación, es necesario disponer de más moléculas en el estado excitado que en el fundamental. Para ello, hay que seleccionar las moléculas con energía  $E_2$  y descartar las de  $E_1$  antes de que entren en la cavidad resonante.

Esto se consigue con un dispositivo llamado *selector*. Consiste en una *lente electrostática cuadrupolar* formada por cuatro electrodos situados longitudinal y simétricamente alrededor del haz de moléculas procedente del tanque (figura 2). Dos electrodos opuestos están conectados a una fuente de tensión  $V_e$  y los otros dos a  $-V_e$ .

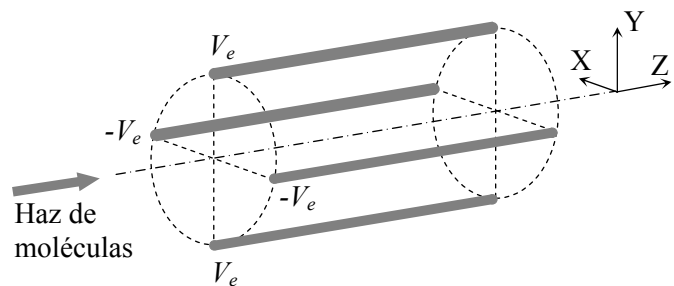


Fig. 2

Para comprender cómo es la distribución de potencial eléctrico dentro de este selector, en primer lugar vamos a estudiar un modelo simplificado de sistema cuadrupolar, formado por cuatro cargas puntuales  $\pm q$  situadas simétricamente sobre los ejes coordenados a una distancia  $d$  del origen O, como se indica en la figura 3.

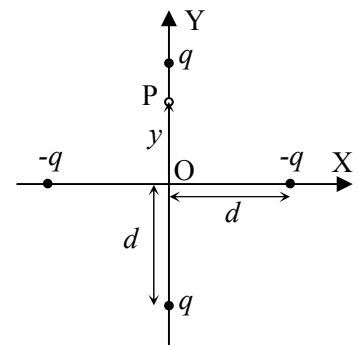


Fig. 3

- d) Determine el potencial electrostático  $V(y)$  en el punto P de la figura 3, situado a una distancia  $y$  del origen, en función de  $y$ ,  $d$  y  $q$ .

- e) Desarrolle la expresión anterior de  $V(y)$  en serie de potencias de  $y/d$ , y obtenga una expresión aproximada suponiendo que  $y \ll d$ . Considere despreciables potencias superiores a 2 del cociente  $y/d$ .

**Ayuda:** Tenga en cuenta el desarrollo en serie binomial

$$(1+\delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2!}\delta^2 + \dots$$

Extendiendo el cálculo anterior a cualquier punto P del plano XY se encuentra que el potencial cerca de O tiene una dependencia hiperbólica

$$V(x, y) \propto (y^2 - x^2)$$

En un selector real el sistema cuadrupolar no está formado por cargas sino por varillas conductoras hiperbólicas conectadas a un potencial  $\pm V_e$  que producen líneas equipotenciales también hiperbólicas (figura 4)

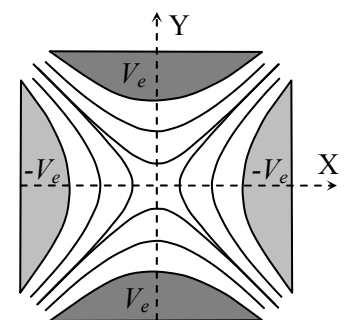


Fig. 4 Líneas equipotenciales

$$V(x,y) = V_e \frac{y^2 - x^2}{r_e^2} \quad (1)$$

donde  $r_e$  es la distancia del centro a cada electrodo. En el máser de Townes,  $r_e = 0,5 \text{ cm}$  y  $V_e = 15 \text{ kV}$ .

Por simplicidad en adelante vamos a trabajar exclusivamente en el plano YZ, es decir  $x = 0$ .

Nótese que en las expresiones anteriores no hay ninguna dependencia con  $z$ , lo que significa que pueden despreciarse, o están compensados por algún método, los efectos debidos a la falta de invariancia longitudinal cerca de los extremos de entrada y salida del selector (*efectos de bordes*).

- f) Justifique que el campo eléctrico en un punto del plano YZ sólo tiene componente  $y$ . A partir de la expresión (1), compruebe que el campo es de la forma  $\mathcal{E}(y) = -Cy$ . Determine y calcule numéricamente la constante  $C$ .

Cuando las moléculas de amoníaco (que son moléculas dipolares) penetran en el selector, la interacción con el campo eléctrico hace que la energía de sus dos niveles se vea perturbada por un término de energía potencial,  $U$ , que disminuye la energía del estado 1 y aumenta la del 2 en esa misma cantidad. Un estudio de mecánica cuántica, que queda fuera de las posibilidades de la Enseñanza Secundaria, permite demostrar que esta energía potencial es proporcional al cuadrado del campo eléctrico (*efecto Stark cuadrático*), de la forma

$$U(r) = \pm \frac{\mu^2}{\Delta E} \mathcal{E}(r)^2 \quad (2)$$

donde  $\mu$  es una constante conocida (momento dipolar eléctrico de la molécula) y  $\mathcal{E}(r)$  es el campo eléctrico a una distancia  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  del eje OZ. Esta energía es positiva para las moléculas en el estado 2 y negativa para las que están en el estado 1, de ahí el doble signo.

En consecuencia, sobre las moléculas actúa una fuerza radial,  $F(r)$  de sentido contrario para los dos estados. En nuestro estudio en el plano YZ, la dependencia  $F(r)$  se reduce a  $F(y)$ .

- g) Determine la fuerza  $F(y)$  sobre una molécula en función de  $\mu$ ,  $\Delta E$  y  $C$ .

Supongamos que las moléculas penetran en el selector a una altura  $y_0$  y con velocidad  $v_0$  paralela al eje OZ (figura 5). Sobre las moléculas en el estado 1 actúa una fuerza que las aleja de este eje, de forma que en la práctica no alcanzan la salida. Sin embargo, sobre las moléculas en el estado 2 actúa una fuerza proporcional a  $y$  dirigida siempre hacia el eje OZ (fuerza elástica), de forma que avanzan realizando una oscilación armónica en torno a dicho eje, en la forma

$$y = y_0 \cos(kz) \quad (3)$$

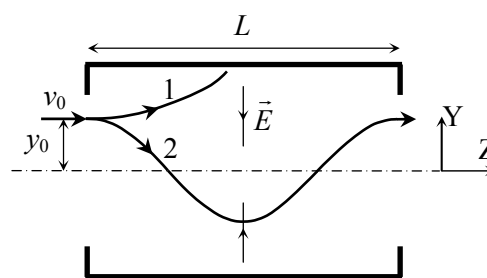


Fig. 5

- h) Determine la frecuencia espacial de la oscilación,  $k$ , de las moléculas del estado 2, en función de  $\mu$ ,  $\Delta E$ ,  $C$ ,  $v_0$  y la masa  $m$  de una molécula.

Interesa que las moléculas excitadas salgan del selector moviéndose hacia la cavidad resonante en paralelo al eje OZ, como ocurre en la figura 5. Esto puede conseguirse con varias posibles longitudes  $L$  del selector.

- i) Determine la mínima longitud,  $L_{\min}$ , que puede tener el selector.

### P3. Solución

a) Frecuencia de la radiación emitida en la transición entre los estados 2 y 1:

$$\Delta E = 9,84 \times 10^{-5} \text{ eV} \times 1,60 \times 10^{-19} \text{ J/eV} = 1,57 \times 10^{-23} \text{ J}$$

$$\Delta E = hf \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = 23,7 \text{ GHz}}$$

b) Número de moléculas efectivas de amoníaco que emiten radiación en cada segundo:

$$N = 10^{-10} / \Delta E \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 6 \times 10^{12} \text{ moléculas/s}}$$

c) La incertidumbre relativa de la frecuencia del reloj es

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{75}{24 \times 10^9} = 3,2 \times 10^{-9}$$

El periodo de oscilación  $T$  (patrón de tiempo) es  $T = 1/f$ . Tomando incrementos en esta igualdad, es inmediato demostrar que la incertidumbre relativa del periodo coincide con la de la frecuencia

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta f}{f}$$

Por tanto, para que el reloj acumule un error  $\Delta t = 1 \text{ s}$ , una estimación del tiempo transcurrido es

$$t = \frac{\Delta t}{3,2 \times 10^{-9}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 3,1 \times 10^8 \text{ s} \approx 10 \text{ años}}$$

d) El potencial electrostático a una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$  es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

En nuestro caso, el potencial total en el punto P es la suma de las contribuciones de las cuatro cargas

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d-y} + \frac{1}{d+y} - \frac{2}{\sqrt{d^2+y^2}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2d}{d^2-y^2} - \frac{2}{\sqrt{d^2+y^2}} \right)$$

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{d} \left( \frac{1}{1-(y/d)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+(y/d)^2}} \right)} \quad (4)$$

e) Teniendo en cuenta el desarrollo en serie indicado en el enunciado, con  $\delta = \mp(y/d)^2$

$$\frac{1}{1-(y/d)^2} = \left(1 - (y/d)^2\right)^{-1} \approx 1 + (y/d)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y/d)^2}} = \left(1 + (y/d)^2\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}(y/d)^2$$

Con esta aproximación, la expresión (4) se reduce a

$$V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{d} \left( \frac{3}{2} (y/d)^2 \right) \Rightarrow \boxed{V \approx \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^2}{d^3}}$$

Se obtiene por fin una dependencia  $V \propto y^2$ , del mismo tipo que la dependencia real dentro del selector indicada en la ecuación (1) del enunciado.

- f) Si se desprecian, o están compensados, los efectos de los bordes, el campo eléctrico en el plano YZ está dirigido según OY, con sentido hacia el origen, pues se compensan las componentes  $E_x$  de los campos de los electrodos negativos, como se esquematiza en la figura (6).

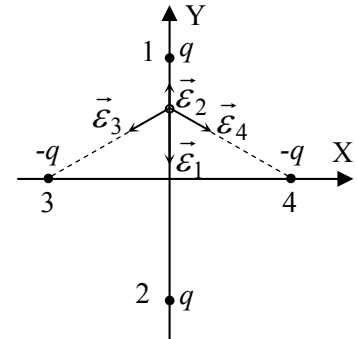


Fig. 6

En total, en los puntos del plano YZ

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_y \vec{j}$$

Para un desplazamiento infinitesimal dentro de este plano

$$d\vec{r} = dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

se cumple

$$dV = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} = -\mathcal{E}_y dy \Rightarrow \mathcal{E}_y = -\frac{dV}{dy}$$

Por tanto, a partir de la expresión (1) del enunciado se obtiene la dependencia lineal esperada

$$\mathcal{E}_y(y) = -\frac{2V_e}{r_e^2} y \Rightarrow \boxed{C = \frac{2V_e}{r_e^2}}, \quad \boxed{C = 1,2 \times 10^9 \text{ V/m}^2}$$

- g) La fuerza y la energía potencial eléctrica se relacionan de forma análoga al apartado anterior

$$F(y) = -\frac{dU}{dy}$$

De la expresión (2) tenemos

$$U(y) = \pm \frac{\mu^2}{\Delta E} \mathcal{E}(y)^2 = \pm \frac{\mu^2}{\Delta E} C^2 y^2 = \pm \frac{\mu^2}{\Delta E} \left( \frac{2V_e}{r_e^2} y \right)^2$$

Por tanto:

$$\boxed{F(y) = \mp \frac{2\mu^2}{\Delta E} C^2 y}$$

con el signo negativo para el estado 2, y el signo positivo para el estado 1.

- h) La única fuerza que actúa dentro del selector sobre las moléculas en el estado 2 es

$$-\frac{2\mu^2}{\Delta E} C^2 y = ma_y \Rightarrow a_y = -\frac{2\mu^2 C^2}{m\Delta E} y$$

Se obtiene una aceleración proporcional a  $y$ , en sentido opuesto, característica de una oscilación armónica. La constante de proporcionalidad es el cuadrado de la frecuencia de oscilación  $\omega$ . Por tanto el movimiento es de la forma

$$y = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

con 
$$\omega = \left( \frac{2\mu^2 C^2}{m\Delta E} \right)^{1/2} = \mu C \left( \frac{2}{m\Delta E} \right)^{1/2}$$

La amplitud  $A$  y la fase inicial  $\alpha$  de la oscilación pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales del movimiento. Planteando

$$y(t=0) = y_0$$

$$v_y(t=0) = 0$$

es inmediato demostrar que  $A = y_0$  y  $\alpha = 0$ .

El movimiento en el eje OZ es uniforme:

$$z = v_0 t$$

Eliminando el tiempo  $t$  en la ec. (4), la ecuación de la trayectoria en el plano YZ queda

$$y = y_0 \cos\left(\frac{\omega}{v_0} z\right)$$

Con lo que la frecuencia espacial de oscilación resulta

$$k = \frac{\omega}{v_0} \Rightarrow k = \frac{\mu C}{v_0} \sqrt{\frac{2}{m\Delta E}}$$

i) El periodo espacial de las oscilaciones dentro del selector es

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Para que las moléculas salgan del detector con velocidad paralela a OZ, la longitud  $L$  del selector debe ser un múltiplo entero de  $\lambda/2$ . La situación de la figura 5 corresponde a  $L = \lambda$ .

La mínima longitud se consigue para  $L = \lambda/2$  (figura 6), es decir

$$L_{\min} = \frac{\pi v_0}{\mu C} \sqrt{\frac{m\Delta E}{2}}$$

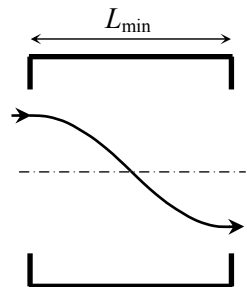


Fig. 6

### P3.- HOJA DE RESPUESTAS

| Apartado | Resultados analíticos  | Resultados numéricos                                    | Puntos |
|----------|--|---|--------|
| a)       |  | $f = 23,7 \text{ GHz}$                                  | 0,5    |
| b)       |  | $N = 6 \times 10^{12} \text{ moléculas / s}$            | 0,5    |
| c)       |  | $t = 3,1 \times 10^8 \text{ s} \approx 10 \text{ años}$ | 1,5    |
| d)       | $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{d} \left( \frac{1}{1-(y/d)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+(y/d)^2}} \right)$ |   | 1      |
| e)       | $V \approx \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^2}{d^3}$  |   | 1      |
| f)       | $C = \frac{2V_e}{r_e^2}$   | $C = 1,2 \times 10^9 \text{ V/m}^2$                     | 1+ 0,5 |
| g)       | $F(y) = \mp \frac{2\mu^2}{\Delta E} C^2 y$   |   | 1      |
| h)       | $k = \frac{\mu C}{v_0} \sqrt{\frac{2}{m\Delta E}}$   |   | 1,5    |
| i)       | $L_{\min} = \frac{\pi v_0}{\mu C} \sqrt{\frac{m\Delta E}{2}}$  |   | 1,5    |