

### P3.- Ondas gravitacionales

El 11 de febrero de 2016 la colaboración aLIGO (advanced Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) anunció al mundo la primera detección directa de ondas gravitacionales, predichas desde hace un siglo por la Teoría de la Relatividad General de Einstein. La señal con el código GW150914 (figura 1) se había detectado el 14 de septiembre de 2015 en los observatorios de Hanford y Livingston como una oscilación de unos 40 Hz de frecuencia inicial, que aumentó hasta unos 250 Hz en menos de 20 ms. El análisis de la señal, que llevó varios meses, permitió deducir que la onda se había producido a más de mil millones de años luz de la Tierra durante el proceso de fusión de dos agujeros negros moviéndose en órbitas espirales, es decir de radio decreciente, debido precisamente a la pérdida de energía por la emisión de una potente onda gravitacional (figura 2), hasta que el sistema colapsó en un único agujero negro de masa apreciablemente inferior a la suma de las masas de los dos agujeros negros originales.

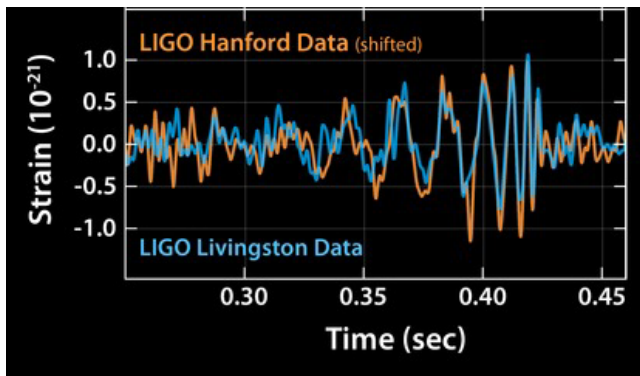


Fig. 1 Señales detectadas

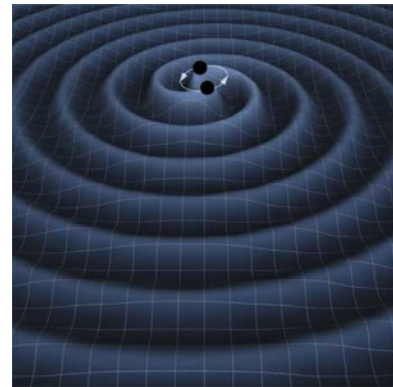


Fig. 2 Impresión artística de las ondas gravitacionales de dos agujeros negros en órbita.

Como sabrá, un agujero negro es un objeto de enorme masa que crea en su entorno un campo gravitatorio tan intenso que ninguna partícula, incluido un fotón que viaja a la velocidad de la luz  $c$ , puede escapar a su atracción si se encuentra a una distancia de su centro inferior a  $R_S$  (radio de Schwarzschild). En primera aproximación, podemos imaginar el agujero negro como una esfera masiva de radio  $R_S$ .

- a) Planteando que la velocidad de escape desde la distancia  $R_S$  es  $c$ , demuestre que el radio de Schwarzschild de un agujero negro de masa  $M$  es  $R_S = 2GM/c^2$ , donde  $G$  es la constante de gravitación universal.

Estudiaremos a continuación el movimiento orbital de dos agujeros negros de igual masa  $M$  que interaccionan gravitatoriamente. Suponga que ambos describen una trayectoria circular en torno al centro geométrico  $O$  del sistema (centro de masas), siendo  $R$  la distancia entre sus centros (figura 3).

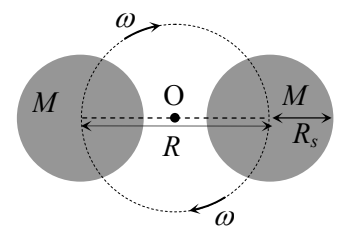


Fig. 3

- b) Determine la velocidad angular  $\omega$  con que giran ambos cuerpos, en función de  $G$ ,  $M$  y  $R$ .

Vamos a hacer algunos cálculos aproximados, cuando los agujeros negros están próximos a tocarse, es decir cuando la distancia entre sus centros es un poco superior a  $2R_S$ . Considere en concreto  $R = 3R_S$ . La frecuencia de la señal oscilante detectada en la Tierra<sup>1</sup> en estas circunstancias fue  $f_{\text{señal}} \approx 200$  Hz (situación en  $t \approx 0,42$  ms en la escala de la figura 1).

- c) Obtenga una expresión para  $\omega$  en este caso, en función de  $G$ ,  $M$  y  $c$ .
- d) Calcule la masa  $M$  de cada agujero negro. Exprese su resultado en kg y en masas del Sol.

<sup>1</sup> Ayuda: Tenga en cuenta que en cada revolución completa del sistema binario se emiten dos crestas de ondas gravitatorias, de forma que la frecuencia de la señal detectada en la Tierra es el doble de la frecuencia de la órbita de los agujeros negros.

La Teoría de la Relatividad General permite determinar la potencia  $P$  emitida en forma de ondas gravitacionales por un sistema de dos masas orbitando bajo la atracción gravitatoria mutua, como el que estamos considerando. Suponiendo que las dos masas son iguales y que la órbita es circular, se obtiene

$$P = \frac{64}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^5}{R^5}$$

La órbita real es espiral, con radio decreciente, pero pueden hacerse cálculos estimativos considerando la misma órbita circular con  $R = 3R_s$  de los apartados anteriores. En la figura 1 se observa que la onda gravitatoria se emitió principalmente durante un breve intervalo de tiempo, del orden de  $\Delta t = 10$  ms .

- e) Suponiendo que toda la energía emitida durante el proceso de interacción y colapso de los agujeros negros se traduce en una pérdida de masa del sistema, haga una estimación de esta pérdida,  $\Delta M$  . Exprese su resultado en kg y en masas del Sol.

Vamos a hablar ahora del sistema de detección. Se ha empleado un *interferómetro de Michelson*, que se esquematiza en la figura 4. Un haz de luz láser, de longitud de onda  $\lambda$ , incide a  $45^\circ$  sobre una lámina semiespejada (*divisor de haz*, D) donde se divide en dos haces, 1 y 2, que viajan en direcciones perpendiculares. Cada haz se refleja normalmente en un espejo plano,  $E_1$  y  $E_2$ , y vuelve hacia D. Parte del haz 1 se refleja y parte del 2 se transmite, de forma que en el haz 3 se superponen (interfieren) las ondas luminosas 1 y 2 que han ido y vuelto por cada uno de los *brazos* del interferómetro. La intensidad de la onda resultante depende de la diferencia de fase,  $\delta$ , entre estas dos ondas. Por ejemplo, si se superponen en contrafase ( $\delta = \pi$ ) la intensidad resultante  $I_3$  es nula (mínimo interferencial). Cualquier pequeña variación en la longitud de los brazos produce un cambio en el estado interferencial y por tanto en  $I_3$ , que se mide con un fotodetector, F.

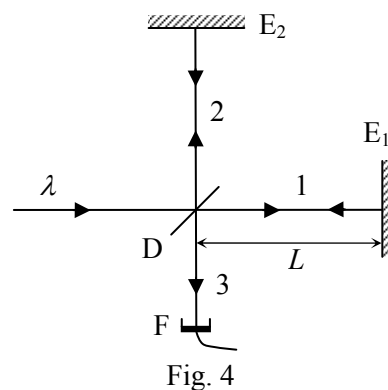


Fig. 4

Siguiendo con el ejemplo anterior, si partiendo de un mínimo interferencial la longitud de uno de los brazos aumenta en  $\lambda/4$ , el camino total recorrido por la luz en ese brazo (ida y vuelta) aumenta en  $\lambda/2$ , de forma que las ondas pasan a interferir en fase y se tiene un máximo interferencial. Si el aumento de longitud fuese  $\lambda/2$  se alcanzaría un nuevo mínimo nulo, en el *orden interferencial* siguiente al inicial.

En el interferómetro del observatorio de Livingston los dos brazos tienen la misma longitud  $L_0 = 4,0$  km. En la figura 5 se esquematiza, de forma muy exagerada, lo que ocurre cuando una onda gravitacional alcanza la superficie de la Tierra. Estas ondas acortan y alargan periódicamente la *fábrica del espacio tiempo* de forma que la longitud  $L$  de los brazos del interferómetro oscila entre  $L_0 + A$  y  $L_0 - A$ , con la particularidad de que estas oscilaciones están en contrafase, es decir cuando el brazo 1 alcanza su longitud máxima  $L_0 + A$ , el brazo 2 tiene la mínima,  $L_0 - A$ , y viceversa.

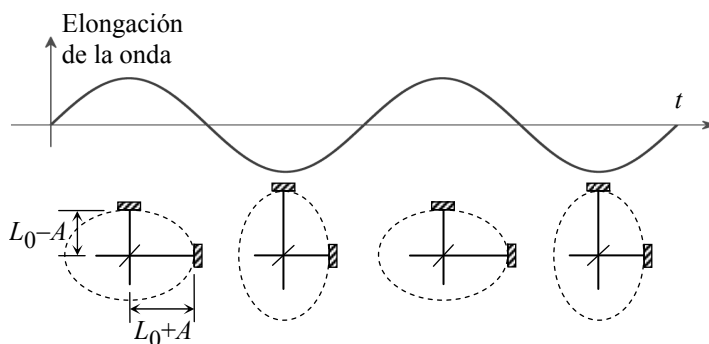


Fig. 5

Suele trabajarse en función de la deformación unitaria (“strain” en inglés) definida como  $h = \Delta L / L_0$ , donde  $\Delta L$  es la diferencia entre las longitudes de los dos brazos. Esta magnitud adimensional  $h$  es la que aparece en ordenadas de la gráfica de la figura 1, en la que se observan claramente las oscilaciones de  $h$  producidas por la llegada de la onda gravitacional. La amplitud de esta oscilación llega a alcanzar el valor  $h_{\max} \approx 10^{-21}$  cuando los agujeros negros empiezan a fusionarse.

- f) Haga una estimación de la máxima amplitud de oscilación de los brazos del interferómetro de Livingston,  $A_{\max}$ , cuando recibió esta señal. Compare su resultado con el radio de un protón.

La deformación a detectar es en la práctica tan pequeña que han sido necesarios extraordinarios esfuerzos técnicos para impedir que quede enmascarada por el “ruido” producido por microsismos o pequeñas variaciones térmicas.

Para poder detectar ondas muy débiles conviene que  $L_0$  sea lo mayor posible. Pero la longitud antes indicada,  $L_0 = 4,0$  km, no sería suficiente en la práctica para poder detectar las ondas producidas por la mayoría de los sucesos cósmicos previsibles. Para aumentar la longitud, se ha recurrido a situar otro espejo dentro de cada brazo, entre el divisor de haz y el espejo original del Michelson (figura 6). Estos espejos tiene una pequeña transmitancia, de forma que, en promedio, la luz realiza unos  $N \approx 280$  viajes de ida y vuelta entre los dos espejos enfrentados antes de volver a alcanzar el divisor de haz y contribuir a la interferencia en el haz 3. Con este procedimiento se consigue aumentar la longitud efectiva de los brazos del Michelson hasta

$$L_{\text{ef}} = NL_0 \approx 1100 \text{ km.}$$

Para terminar, vamos a caracterizar la extraordinaria sensibilidad del aparato. Observando la gráfica de la figura 1, se deduce que el sistema es capaz de detectar deformaciones, no enmascaradas por el ruido, con una amplitud mínima  $h_{\min} \sim 10^{-22}$ .

- g) Exprese la sensibilidad del instrumento en fracciones de orden interferencial<sup>2</sup>,  $\delta_{\min}/2\pi$ .

Datos: Constante de gravitación universal,  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$   
 Velocidad de la luz en el vacío,  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$   
 Masa del Sol,  $M_{\text{Sol}} = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$   
 Radio de un protón,  $r_p = 0,88 \times 10^{-15} \text{ m}$   
 Longitud de onda de la luz láser (Nd-YAG):  $\lambda = 1,06 \text{ }\mu\text{m}$

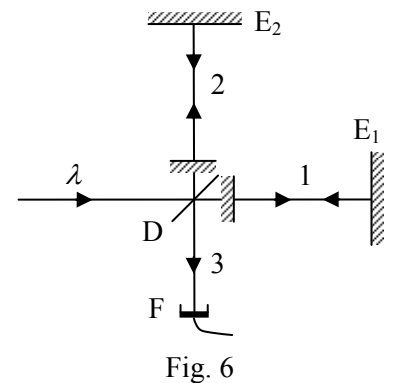


Fig. 6

<sup>2</sup> Ayuda: Cada nuevo orden interferencial corresponde a un cambio  $2\pi$  en la diferencia de fase  $\delta$  entre las dos ondas que se superponen en el haz 3.

### P3.- Solución

- a) El radio de Schwarzschild se obtiene planteando que la velocidad de escape (correspondiente a energía mecánica nula) es  $c$ .

$$E=0=\frac{1}{2}mc^2 - G\frac{Mm}{R_s} \rightarrow \boxed{R_s = \frac{2GM}{c^2}}$$

b)  $G\frac{M^2}{R^2} = M\omega^2\frac{R}{2} \rightarrow \boxed{\omega = \left(\frac{2GM}{R^3}\right)^{1/2}}$

c)  $R \approx 3R_s = \frac{6GM}{c^2} \rightarrow \boxed{\omega \approx \frac{c^3}{\sqrt{108} GM}}$

d)  $f_{\text{señal}} = 200 \text{ Hz} \rightarrow f_{\text{órbita}} = 100 \text{ Hz}; \omega = 200\pi \text{ s}^{-1}$   
 $M \approx \frac{c^3}{\sqrt{108} G\omega} \rightarrow \boxed{M \approx 6,2 \times 10^{31} \text{ kg} = 31 M_{\text{Sol}}}$

Las masas deducidas del estudio detallado de la señal son  $M_1 = (36 \pm 5) M_{\text{Sol}}$ ,  $M_2 = (29 \pm 4) M_{\text{Sol}}$

e)  $R_s = \frac{2GM}{c^2} = 92 \text{ km}; \quad R = 3R_s = 276 \text{ km}$

$$P = \frac{64}{5} \frac{G^4 M^5}{c^5 R^5} = 6,0 \times 10^{49} \text{ W}$$

$$\Delta E = P\Delta t \approx 6,0 \times 10^{47} \text{ J} = \Delta M c^2 \rightarrow \boxed{\Delta M \approx 6,7 \times 10^{30} \text{ kg} = 3,3 M_{\text{Sol}}}$$

La pérdida real estimada es  $\Delta M = (3 \pm 0,5) M_{\text{Sol}}$

- f) Amplitud de la deformación máxima detectada en  $L_0 = 4 \text{ km}$ :  $h_{\text{max}} \approx 10^{-21}$

$$h_{\text{max}} = \frac{\Delta L_{\text{max}}}{L_0} = \frac{2A_{\text{max}}}{L_0} \rightarrow A_{\text{max}} = \frac{h_{\text{max}} L_0}{2}$$

$$\boxed{A_{\text{max}} \approx 2 \times 10^{-18} \text{ m}}$$

$$\boxed{r_p / A_{\text{max}} \approx 440}$$

- g) Si la diferencia de longitudes de los brazos es  $\Delta L$ , la diferencia de caminos ópticos (ida+vuelta) es  $2\Delta L$ . Por tanto, la diferencia de fase entre las dos ondas es

$$\delta = k 2\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} 2h L_{\text{ef}}$$

Donde  $k$  es el número de ondas.

Cada cambio de fase  $2\pi$  corresponde a un nuevo orden interferencial. La amplitud mínima detectable es  $h_{\text{min}} \sim 10^{-22}$ . Por tanto, la sensibilidad del instrumento, en fracciones de orden interferencial es

$$\frac{\delta_{\text{min}}}{2\pi} = \frac{2L_{\text{ef}}}{\lambda} h_{\text{min}} \rightarrow \boxed{\frac{\delta_{\text{min}}}{2\pi} \sim 2 \times 10^{-10}}$$

Nótese que, como se indica en el enunciado, para poder detectar señales muy débiles ( $h_{\text{min}}$  lo menor posible) interesa  $L_{\text{ef}}$  lo mayor posible.

### P3.- Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)	$R_s = \frac{2GM}{c^2}$		1
b)	$\omega = \left( \frac{2GM}{R^3} \right)^{1/2}$		1,5
c)	$\omega \approx \frac{c^3}{\sqrt{108 GM}}$		1
d)		$M \approx 6,2 \times 10^{31} \text{ kg}$ $M \approx 31 M_{\text{Sol}}$	0,8 0,2
e)		$\Delta M \approx 6,7 \times 10^{30} \text{ kg}$ $\Delta M \approx 3,3 M_{\text{Sol}}$	1,8 0,2
f)		$A_{\text{max}} \approx 2 \times 10^{-18} \text{ m}$ $r_p / A_{\text{max}} \approx 440$	1,3 0,2
g)		$\frac{\delta_{\text{min}}}{2\pi} \sim 2 \times 10^{-10}$	2