P Exp. Estudio experimental de un generador de corriente

Introducción; objetivos

Según la ley de Faraday, cuando cambia el flujo magnético a través de un circuito se induce en él una *fuerza electromotriz* (fem) proporcional a la velocidad de variación del flujo. Por ejemplo, si se hace girar una espira conductora frente a un imán, se induce una fem y por tanto circula corriente eléctrica por la espira.

Un motor eléctrico contiene imanes permanentes y un bobinado conductor, de forma que, si se hace girar mediante algún dispositivo mecánico, funciona como generador eléctrico y es capaz de alimentar un circuito externo. Un porcentaje elevado de la energía mecánica suministrada se transforma en energía eléctrica, aunque hay pérdidas debidas a la fricción.

En esta prueba experimental se propone estudiar las características de un pequeño motor de corriente continua que se hace funcionar como generador, haciéndolo girar mediante un hilo del que se cuelgan pesas.

Materiales

- Motor/generador de corriente continua. Resistencia interna (del bobinado), $r = 8{,}8\ \Omega$.
- Listón de madera y brida para sujetar el motor.
- Polea que se inserta a presión en el eje del motor.
- Tijeras, hilo y clip.
- Arandelas que se usan como pesas. Masa de las arandelas: grandes 11,6 g; pequeñas 5,9 g.
- Pila de petaca.
- Cinta métrica.
- Cronómetro.
- 2 resistencias de 15 Ω̃
- Multímetro.
- Escuadra metálica y sargento. 3 pinzas metálicas.

Montaje

- El listón de madera se coloca vertical, apoyado en el borde de la mesa, y se sujeta mediante la escuadra, una pinza y el sargento como indica la figura 1.

Fig. 1

Fig. 2

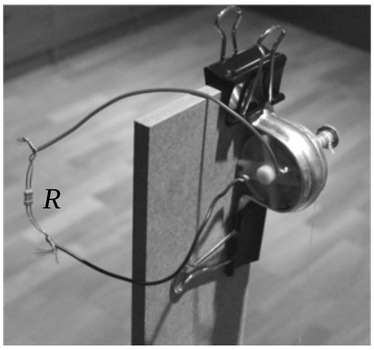


Fig. 3

- El hilo se ata al borde de la polea de plástico como muestra la figura 2. En el extremo inferior del hilo se ata el gancho para colgar las pesas, que se construye doblando el clip. La longitud del hilo debe ser suficiente para que las pesas puedan llegar al suelo, después de descender 1,2 m aproximadamente. La polea se inserta a presión en el eje del motor, de forma que quede bien fijada.

- El motor se sujeta en la parte alta del listón mediante una brida que, a su vez, se sujeta mediante dos pinzas (figura 3). El eje del motor debe quedar horizontal, con el hilo colgando por el exterior de la mesa.
- Los terminales del generador se conectan a una resistencia R = 7,5 Ω, (dos resistencias de 15 Ω en paralelo). Para realizar la conexión basta con enrollar los cables del generador a las patas de la resistencia.
- Para medir la caída de potencial en la resistencia, se conecta en paralelo el multímetro, en la escala de 2 V de tensión continua.
- En total (figura 4), el motor accionado mediante las pesas es un generador de fem ε y resistencia interna $r = 8{,}8\ \Omega$, que alimenta una resistencia externa $R = 7{,}5\ \Omega$, en la que se mide la tensión ΔV con un voltímetro.

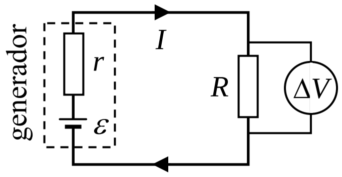


Fig. 4

- Para medir la velocidad uniforme de caída de las pesas, basta cronometrar el tiempo que tardan en recorrer una distancia de, por ejemplo, un metro, entre una marca realizada a lápiz en el listón y el suelo.
- Enrollar el hilo en la polea a mano es tedioso. Es más rápido y práctico alimentar el motor con la pila de petaca, tocando con sus terminales algo abiertos las patas de la resistencia.
- Comprobaciones, ajustes y pruebas preliminares:
  - Verifique el correcto funcionamiento del cronómetro y del voltímetro.
  - Es necesario que el eje del motor esté horizontal, de modo que, cuando se enrolla el hilo en la polea al alimentar con la pila, las vueltas de hilo queden distribuidas uniformemente y no se superpongan en exceso.
  - Empleando dos o tres arandelas como pesas se puede comprobar el funcionamiento del dispositivo y adquirir práctica en las medidas de ΔV y del tiempo de caída de las pesas.

Modelo teórico

Cuando las masas colgadas hacen girar la polea unida al generador, un bobinado compuesto por muchas espiras gira en el seno del campo magnético producido por unos imanes. Al aplicar la ley de Faraday se obtiene una fem inducida ε proporcional a la velocidad angular de rotación, ω. Con una geometría adecuada se consigue además que esta fem sea aproximadamente constante. En nuestro montaje, la ω de rotación del bobinado es a su vez proporcional a la velocidad v con que desciende la masa colgada, siendo la relación entre ambas el radio de la polea. En total, es de esperar una proporcionalidad directa entre ε y v.

$$\varepsilon = k\,v \tag{1}$$

donde k es una constante característica del generador, esencialmente dependiente del radio de la polea, de la geometría del bobinado y de la intensidad del campo magnético de los imanes.

Idealmente, el generador transforma energía mecánica (energía potencial gravitatoria de la masa colgada) en energía eléctrica, que se disipa en la resistencia del circuito (efecto Joule). Cuando la masa m desciende con velocidad v, la potencia aportada por la fuerza gravitatoria es directamente proporcional a esta velocidad

$$P_{mec} = mgv$$

Sin embargo, la potencia eléctrica disipada en el circuito crece con el cuadrado de la velocidad

$$P_{elec} = \varepsilon\, I = \frac{\varepsilon^2}{R+r} = \frac{k^2}{R+r} v^2$$

La masa m empieza a caer partiendo del reposo. En los primeros instantes su velocidad es creciente ya que la P_{mec} suministrada es superior a la P_{elec} disipada, y la diferencia entre ambas se convierte en energía cinética de m, es decir en un aumento de v. Como P_{elec} crece con v^2 y P_{mec} con v, el incremento de velocidad es cada vez menor hasta que, al cabo de un tiempo suficientemente largo, ambas potencias se igualan y m desciende con velocidad uniforme[1] (velocidad *límite*). En estas circunstancias, se cumple

$$P_{mec} = P_{elec} \quad \Rightarrow \quad mgv = \frac{k^2}{R+r} v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{g(R+r)}{k^2} m$$

En un generador real existe además una fricción mecánica que frena la rotación del sistema. Para vencer esta fricción es necesario que la masa colgada supere un cierto valor mínimo m_0, característico de cada generador[2]. La potencia mecánica asociada a esta masa, $m_0 g\, v$, se pierde en calentamiento del sistema por fricción. En consecuencia, un balance energético más realista conduce a una velocidad límite de descenso proporcional a la masa eficaz, $m - m_0$.

$$v = \frac{g(R+r)}{k^2}(m - m_0) \qquad (2)$$

Uno de los objetivos de esta prueba experimental es comprobar este modelo teórico, y en concreto determinar los valores de las constantes características del generador, k y m_0.

Medidas y preguntas

1) Cuelgue sucesivamente del hilo las arandelas necesarias para que los valores de la masa m sean los indicados en la primera columna de la tabla 1 de la hoja de respuestas. Para cada valor de m, mida y anote en la columna adecuada de la tabla I de la figura 5, al final del enunciado:

   - El tiempo que tarda m en descender una altura h = 1,00 m. Es conveniente repetir tres veces la medida (t_1, t_2 y t_3) y calcular el valor medio, $\bar{t}$.
   - La caída de potencial ΔV en la resistencia R. Como su valor puede variar ligeramente durante el descenso de m, es conveniente anotar los valores máximo y mínimo observados y tomar el promedio, $\overline{\Delta V}$, para cálculos posteriores.

2) A partir de las medidas anteriores, calcule para cada m, y anote en las columnas correspondientes de la tabla II de la figura 6, la velocidad v de la masa, la intensidad I que circula por el circuito y la fem ε del generador.

3) Aplicando (1), calcule en cada caso el valor de la constante k del generador y anótelo en la última columna de la tabla 2. Calcule el valor medio de k y haga una estimación de su incertidumbre (margen de error), Δk.

4) Represente gráficamente en el papel milimetrado los puntos experimentales $(x, y) = (m, v)$.

5) Ajuste estos puntos a una línea recta.

6) Deduzca de este ajuste los valores de las dos constantes características del generador[3], k y m_0.

---

[1] En nuestro montaje la velocidad límite se alcanza al poco de soltar m, como es fácil comprobar experimentalmente.

[2] La fuerza de rozamiento dinámica (cuando hay deslizamiento relativo) es inferior a la fuerza de rozamiento estática máxima (límite de equilibrio, sin deslizamiento). Por ello, en nuestro sistema, la masa que hay que colgar para que el generador empiece a girar partiendo del reposo puede ser apreciablemente superior a m_0.

[3] Puede haber discrepancias del orden del 5% entre los valores de k obtenidos en los apartados 3 y 6, debidas principalmente a la dispersión de los valores reales de R+r en los diversos montajes experimentales. Para cálculos posteriores, es preferible tomar el valor de k obtenido en el apartado 6.

7) Haga una estimación de las incertidumbres de estas dos constantes.

8) Deduzca la expresión analítica de la intensidad que circula por el circuito, I, en función de las constantes internas del generador (k y m_0), y de los parámetros externos (m y R). En particular, ¿cómo depende I de R?

9) Mediante las medidas que considere oportunas, compruebe experimentalmente la dependencia prevista de I con R. Explique detalladamente las medidas que ha realizado y preséntelas en la tabla III de la figura 7. Discuta los resultados.

Sugerencia: trabaje con una masa suspendida fija, por ejemplo m = 23,2 g.

Tabla I							
m (g)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	$\bar{t}$ (s)	ΔV_{max} (V)	ΔV_{min} (V)	$\overline{\Delta V}$ (V)
17, 5							
23,2							
29,1							
34,8							
40,7							
46,4							
52,3							
58,0							

Fig. 5

Tabla II				
m (g)	v (m/s)	I (A)	ε (V)	k (Vs/m)
17, 5				
23,2				
29,1				
34,8				
40,7				
46,4				
52,3				
58,0				

Fig. 6

Tabla III						
R (Ω)						

Fig. 7

Solución

1) Ejemplo de medidas reales:

Tabla I

m (g)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	$\bar{t}$ (s)	ΔV_{max} (V)	ΔV_{min} (V)	$\overline{\Delta V}$ (V)
17, 5	14,40	14,37	14,44	14,40	0,15	0,15	0,15
23,2	8,72	8,75	8,72	8,73	0,25	0,23	0,24
29,1	6,90	6,40	6,50	6,60	0,34	0,32	0,33
34,8	5,37	5,34	5,28	5,33	0,42	0,39	0,405
40,7	4,56	4,29	4,53	4,46	0,52	0,49	0,505
46,4	3,84	3,62	3,69	3,72	0,59	0,57	0,58
52,3	3,22	3,28	3,28	3,26	0,68	0,66	0,67
58,0	2,82	2,88	2,78	2,83	0,75	0,73	0,74

2) Aplicando $v = h/t$, $I = \Delta V / R$ y $\varepsilon = (R+r)I$, se obtiene

Tabla II

m (g)	v (m/s)	I (A)	ε (V)	k (Vs/m)
17, 5	0,0694	0,020	0,33	4,76
23,2	0,115	0,032	0,52	4,54
29,1	0,152	0,044	0,72	4,75
34,8	0,188	0,054	0,89	4,74
40,7	0,224	0,067	1,09	4,86
46,4	0,269	0,077	1,26	4,68
52,3	0,307	0,089	1,46	4,76
58,0	0,354	0,099	1,61	4,55

3) En la última columna de la tabla anterior se presentan los valores de la constante $k = \varepsilon / v$ obtenidos en cada caso. El valor medio es

$$\boxed{\bar{k} = 4{,}71 \ \text{Vs/m}}$$

Una estimación razonable para la incertidumbre de esta constante, obtenida como promedio de n = 8 determinaciones, es su error típico[4]

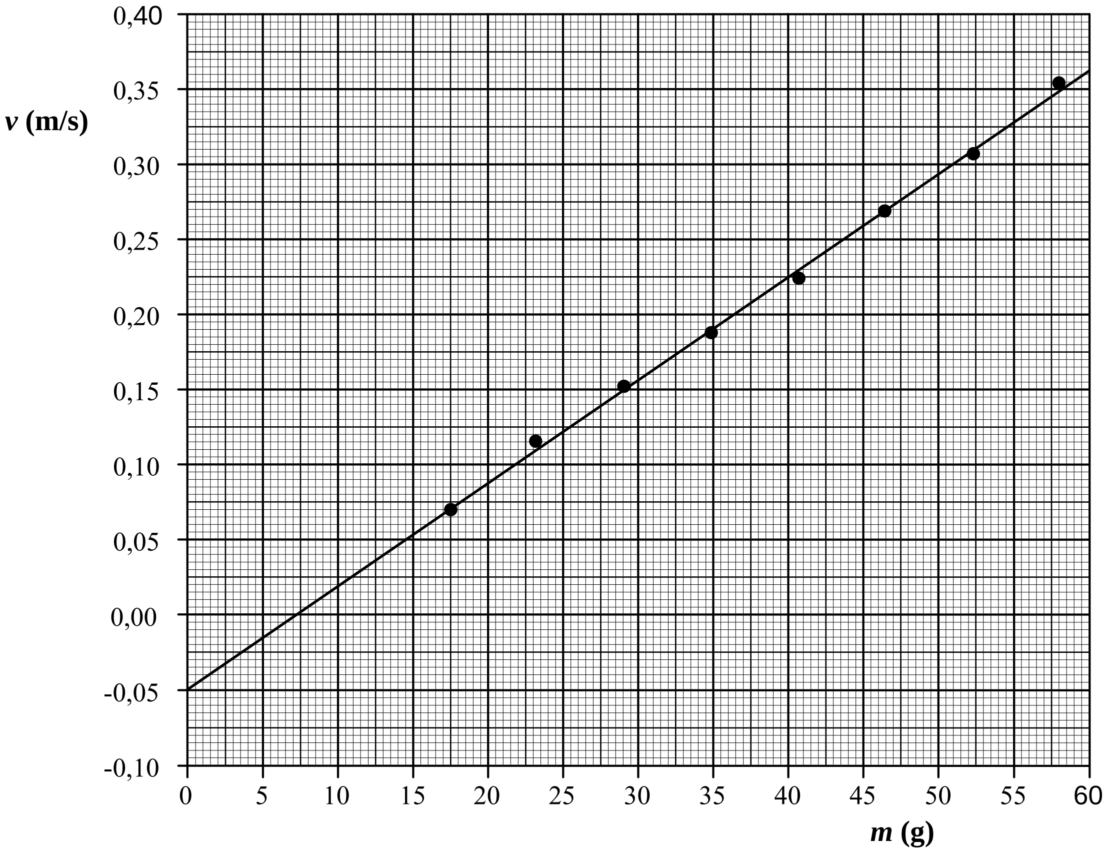
$$\Delta k = \left[\frac{\sum \left(\bar{k} - k_i \right)^2}{n(n-1)} \right]^{1/2}$$

Se obtiene

$$\boxed{\Delta k = 0{,}04 \ \text{Vs/m}}$$

[4] Si se toma como incertidumbre el error típico, el nivel de confianza es inferior al 65% pues se han realizado menos de 10 medidas. Para aumentar este nivel al 95% habría que duplicar con creces este margen de error. Sin necesidad de buscar en unas tablas de error, un resultado razonable con aproximadamente el 95% de confianza sería $k = (4{,}7 \pm 0{,}1)$ Vs/m

4) Se presenta la gráfica pedida, con un aspecto similar al que tendría dibujada en papel milimetrado.



5) En la gráfica anterior también se ha trazado la recta que más aproximadamente pasa por los puntos experimentales. La pendiente y la ordenada en el origen pueden calcularse con buena precisión a partir de dos puntos alejados de esta recta. Pueden tomarse, por ejemplo, los puntos extremos de dicha recta, de coordenadas

$$(x_1;\ y_1) = (0{,}0;\ -0{,}050), \qquad (x_2;\ y_2) = (60{,}0;\ 0{,}362)$$

Por tanto, la pendiente, p, y la ordenada en el origen, c, de la recta son[5]

$$p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}412 \text{ m/s}}{60{,}0 \text{ g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 6{,}87 \ \text{m s}^{-1}\text{kg}^{-1}}$$

$$c = y_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -0{,}050 \text{ m/s}}$$

6) Según la ecuación (2) del enunciado, la pendiente y la ordenada en el origen de la gráfica anterior son, respectivamente,

$$p = \frac{g(R+r)}{k^2}\ , \qquad c = -p\, m_0$$

Por tanto, las constantes k y m_0 del generador pueden deducirse en la forma

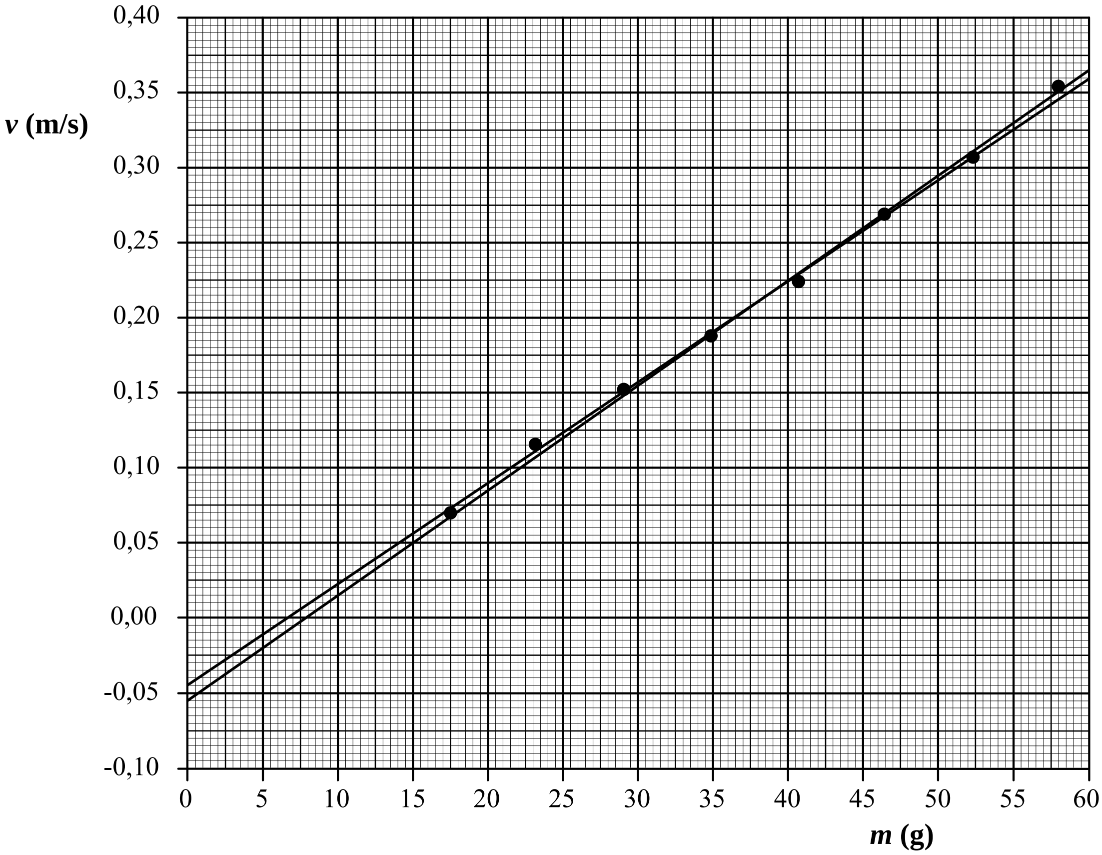
$$k = \left(\frac{g(R+r)}{p}\right)^{1/2}, \qquad m_0 = -\frac{c}{p} \qquad (3)$$

Se obtiene

[5] Aplicando el método de mínimos cuadrados se obtiene p = 6,866 m·s^{-1}kg^{-1} y c = -0,0496 m/s.

$\boxed{k = 4{,}82 \ \text{Vs/m}}$, $\boxed{m_0 = 7{,}3 \ \text{g}}$

7) Las incertidumbres de la pendiente y de la ordenada en el origen de la gráfica $v(m)$ pueden estimarse trazando las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a los puntos experimentales, dentro de su margen de incertidumbre. En nuestro caso, la dispersión de los puntos



experimentales respecto a la recta óptima es pequeña, del orden del radio de los puntos dibujados. Teniendo en cuenta, además, que ambas rectas deben pasar por el punto promedio de los experimentales, $(\overline{m}, \overline{v})$, en la siguiente gráfica se presenta una estimación razonable de estas rectas.

Observando sobre la gráfica las coordenadas de los dos puntos extremos de cada una de estas dos rectas, como en el apartado 5, se obtienen sus pendientes y sus ordenadas en el origen

$$p_{max} = \frac{(0{,}365 + 0{,}055)\ \text{m/s}}{60{,}0\ \text{g}} = 7{,}00\ \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\text{kg}^{-1} \qquad c_{min} = -0{,}055\ \ \text{m/s}$$

$$p_{min} = \frac{(0{,}359 + 0{,}045)\ \text{m/s}}{60{,}0\ \text{g}} = 6{,}73\ \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\text{kg}^{-1} \qquad c_{max} = -0{,}045\ \ \text{m/s}$$

Por tanto, una estimación de las incertidumbres de p y c podría ser[6]

$$\Delta p = 0{,}13\ \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\text{kg}^{-1} \qquad \Delta c = 0{,}005\ \ \text{m/s}$$

Los correspondientes valores máximo y mínimo de las constantes k y m_0 se obtienen aplicando (3) con los valores de p y c ajustados para cada una de estas dos rectas

[6] Un cálculo estadístico conduce a que los errores típicos de p y c son, respectivamente, 0,11 m·s^{-1}kg^{-1} y 0,004 m/s.

$$k_{max} = \left(\frac{g(R+r)}{p_{min}} \right)^{1/2} = 4{,}87 \ \text{Vs/m}, \qquad m_{0,max} = -\frac{c_{min}}{p_{max}} = 7{,}9 \ \text{g}$$

$$k_{min} = \left(\frac{g(R+r)}{p_{max}} \right)^{1/2} = 4{,}78 \ \text{Vs/m}, \qquad m_{0,min} = -\frac{c_{max}}{p_{min}} = 6{,}7 \ \text{g}$$

Los valores máximo y mínimo estimados para m_0 también pueden leerse directamente en la gráfica anterior, pues, teniendo en cuenta la ecuación (2) del enunciado, corresponden a las intersecciones de las dos rectas con la ordenada $v = 0$.

En total, los resultados para k y m_0, incluyendo una estimación de sus incertidumbres, serían

$$\boxed{k = (4{,}82 \pm 0{,}05) \ \text{Vs/m}} \qquad \boxed{m_0 = (7{,}3 \pm 0{,}6) \ \text{g}}$$

Nótese que las incertidumbres relativas de k y m_0, son del orden del 1% y del 8%, respectivamente, por lo que la principal fuente de error para cálculos posteriores es la incertidumbre de m_0.

8) La intensidad que circula en régimen estacionario por el circuito es, teniendo en cuenta la ley de Ohm y las ecuaciones (1) y (2) del enunciado

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{k\,v}{R+r} = \frac{k}{R+r}\,\frac{g(R+r)}{k^2}(m - m_0)$$

Simplificando, queda

$$\boxed{I = \frac{(m - m_0)g}{k}} \qquad (4)$$

Esta corriente no depende de la resistencia del circuito. Por ello, tal y como indica el título de esta prueba experimental, el sistema opera como un ***generador de corriente***. Nótese que la constante k del generador describe la relación entre el peso motor efectivo y la intensidad que suministra el generador, por lo que en el SI las unidades de k podrían expresarse como N/A.

9) En particular, para $m = 23{,}2\,\text{g}$ la ecuación (4) prevé una corriente

$$I = 32{,}4\,\text{mA}$$

Propagando las incertidumbres de k y m_0 obtenidas en el apartado 7, se obtiene una incertidumbre para esta corriente

$$\Delta I = 1{,}2 \ \text{mA}.$$

Como se dispone de dos resistencias de 15 Ω, puede trabajarse experimentalmente con tres valores de la resistencia de carga del generador: $R_1 = 7{,}5\,\Omega$ si se conectan en paralelo, $R_2 = 15\,\Omega$ si se conecta una sola resistencia y $R_3 = 30\,\Omega$ si se conectan en serie. En la tabla III se presentan medidas de la caída de potencial ΔV en cada caso y de la intensidad deducida como $I = \Delta V / R$. También podría medirse directamente la intensidad usando el multímetro como amperímetro, conectado en serie con la resistencia y el generador.

El acuerdo entre las previsiones del modelo y los resultados experimentales es correcto, dentro del margen de incertidumbre estimado.

Tabla III

R (Ω)	ΔV_{max} (V)	ΔV_{min} (V)	$\overline{\Delta V}$ (V)	I (mA)
7,5	0,25	0,23	0,24	32
15	0,52	0,48	0,50	33
30	1,01	0,97	0,99	33