P1. En la noria del parque de atracciones.

Un buen día soleado, Pedro y Ana se divierten en el parque de atracciones. Montados en la noria, a Pedro se le plantean muchas cuestiones de Física, como las siguientes.

La noria tiene un radio $R = 10$ m, y el motor que la acciona tiene una potencia $P = 2$ kW. Se desprecian todos los rozamientos.

a) ¿Cuál es la masa móvil, *M*, de la noria, suponiendo que toda ella se encuentra en la periferia, si tarda un tiempo $t_1 = 10$ s en adquirir una velocidad angular $\omega_1 = 0,2$ rad/s?

b) Cuando Pedro pasa por la posición más alta, se le cae una moneda del bolsillo. ¿Qué tiempo, t_2, tardará en llegar al suelo? ¿A qué distancia, *d*, cae, medida desde la vertical del punto más alto?

c) ¿Qué velocidad angular, ω_2, debería tener la noria para que Ana se sintiera ingrávida, y en qué posición le ocurriría esto?

d) Describe el movimiento de Ana visto desde la cabina de Pedro, diametralmente opuesta a la suya. ¿Cuáles son su velocidad y aceleración en función del tiempo? ¿Cómo es el movimiento de Pedro respecto a Ana?

e) En un momento en que el motor esta desconectado y la noria girando a una velocidad $\omega_3 = 0,1$ rad/s, Pedro sube a la noria en marcha dando un pequeño salto lateral desde el andén. Si pesa 50 kg, ¿cuál es la variación de velocidad angular de la noria debida al salto?

Solución

a) El trabajo necesario para que la noria, partiendo del reposo, alcance una velocidad angular de giro ω_1 es igual a la diferencia de energía cinética, la final menos la inicial que es cero.

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2 - 0$$

Donde I_0 es el momento de inercia de la noria respectoa su eje de rotación. Si, tal como indica el enunciado, toda la masa de la noria puede considerarse distribuida en su periferia, $I_0 = MR^2$. Por lo tanto

$$W = \frac{1}{2} M R^2 \omega_1^2$$

Por otra parte, si t_1 es el tiempo que transcurre hasta que la noria adquiera la velocidad angular ω_1, la potencia media que generada por el motor será $P = W / t_1$, luego

$$P = \frac{1}{2t_1} M R^2 \omega_1^2 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2Pt_1}{R^2 \omega_1^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 10000 \text{ kg}}$$

b) La velocidad de la moneda en el instante de "caer", es horizontal y su módulo es $v_m = \omega_1 R$, como se indica en la figura 1. A partir de ese instante, la moneda describe una trayectoria parabólica hasta llegar al suelo. Como se deduce en el estudio cinemático del "tiro" horizontal,

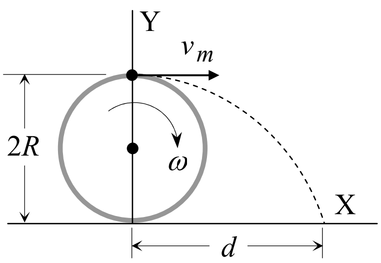

Fig. 2

$$y = 2R - \frac{1}{2} g t^2$$

El tiempo, t_2, que tardará la moneda hasta llegar al suelo ($y = 0$), es

$$t_2 = \sqrt{\frac{4R}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 2{,}02 \text{ s}}$$

La distancia, *d*, del punto en el que la moneda toca el suelo, es

$$d = v_m t_2 = \omega_1 R \sqrt{\frac{4R}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 4{,}04 \text{ m}}$$

c) Ana está describiendo una trayectoria circular con una velocidad angular constante. Se sentiría ingrávida si en el punto más alto, su aceleración centrípeta fuese igual a la de la gravedad, es decir, su módulo fuese

$$R\omega_2^2 = g \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_2 = 0{,}99 \text{ rad/s}}$$

d) El enunciado de este apartado pide hacer una descripción del movimiento de Ana en un sistema de referencia ligado a Pedro. Pues bien, consideraremos dos sistemas de referencia, uno de ellos, el OXY´Z, con origen en el centro O de la noria; el otro, O´X´Y´Z, en la cabina en la que se encuentra Pedro, ambos representados simbólicamente en la figura 2. El origen O´ de este sistema se mueve en una trayectoria circular de radio *R*, pero supondremos que las direcciones de sus ejes son fijas.

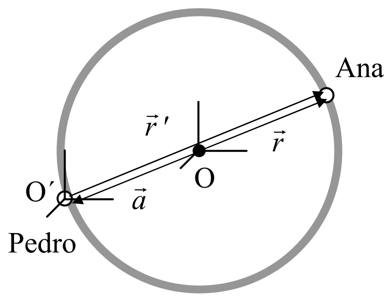

Fig. 2

Desde ambos sistemas, el movimiento de Ana, situada en una cabina diametralmente opuesta a la de Pedro, se describe mediante los radiovectores $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ respectivamente. Ambos vectores están relacionados por

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}$$

Como nos interesa el movimiento de Ana respecto a Pedro

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a} \qquad (1)$$

Si llamamos $\vec{u}_r$ al vector unitario en la dirección de $\vec{r}$, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{a}$ expresados en función de su módulo son

$$r = R\vec{u}_r \quad \text{y} \quad a = -R\vec{u}_r$$

Con lo que la expresión (1) es

$$\vec{r}\,' = R\vec{u}_r - (-R\vec{u}_r) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}\,' = 2R\vec{u}_r}$$

Lo que significa que Ana, respecto a Pedro, describe una trayectoria circular de radio 2*R*. La velocidad angular de la noria ω_1, es la misma con la que Pedro ve girar a Ana, ésta ve girar a Pedro, ya que cada uno de ellos ve que el otro da una vuelta completa en un tiempo $T_1 = 2\pi / \omega_1$, que es el mismo que tarda la noria en dar una vuelta. Así pues, la velocidad y aceleración de Ana respecto a Pedro son

$$\boxed{\begin{aligned} v_{Ana} &= \omega_1\, 2R \\ a_{Ana} &= \omega_1^2\, 2R \end{aligned}} \qquad (2)$$

En cuanto a la descripción del movimiento de Pedro desde el punto de vista de Ana, el razonamiento es idéntico y el resultado es que Ana ve a Pedro moviéndose en una trayectoria circular de radio 2*R* con velocidad y aceleración iguales a (2), pero con direcciones opuestas.

e) En este proceso, el momento angular del sistema Noria-Pedro se conserva. Por lo tanto el momento angular inicial, L_i, justo antes de subir a la noria, es igual al final, L_f cuando Pedrito ya ha entrado en la cabina. Por otra parte, dichos momentos angulares son

$$L_i = I_0\, \omega_1$$
$$L_f = I_0'\, \omega_3$$

Donde I_0 e I_0' son los momentos de inercia de la noria en los instantes señalados. Sus valores son

$$I_0 = M R^2$$
$$I_0' = (M + m) R^2$$

Siendo *m* la masa de Pedro. Por tanto

$$M R^2 \omega_1 = (M + m) R^2 \omega_3 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{M}{M + m}\omega_1$$

La variación de la velocidad angular de la noria es

$$\Delta\omega = \omega_3 - \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = -\frac{m}{M + m}\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\omega = -4{,}97 \times 10^{-4} \ \text{rad/s}}$$