P1. Un calendario fósil.

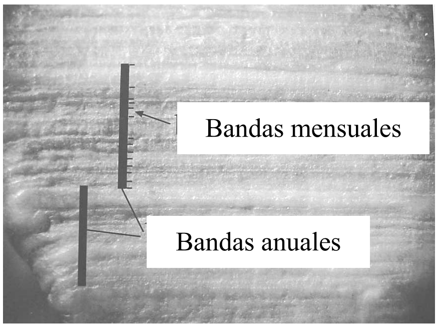

Fig. 1

Algunos corales generan en su esqueleto finas estrías a causa de las interrupciones diarias (día-noche) de su crecimiento. Estas estrías, posiblemente debidas a las variaciones de profundidad del mar por efecto de las mareas, se agrupan en estrechas bandas que corresponden a cada mes lunar. A su vez, las bandas mensuales se agrupan en otras, más anchas, con una periodicidad anual. Pueden apreciarse las citadas bandas en la fotografía de la figura 1, que corresponde a un coral fósil de *Calceola sandalina*, perteneciente al Museo Paleontológico de la Universidad de Zaragoza.

En definitiva, el sistema de estrías y bandas del esqueleto coralino equivale a un "calendario" de la época en la que el coral vivió y, a través de un estudio paleontológico, se deduce que entonces la duración del año era de unos 400 días. Por tanto, la Tierra giraba en torno a su eje con una velocidad angular mayor que en la actualidad. Puede suponerse que el periodo de rotación de la Tierra en torno al Sol no ha variado apreciablemente desde aquella época.

Por otra parte, mediciones muy precisas del tiempo de vuelo de pulsos láser emitidos desde la Tierra y reflejados en espejos colocados en la Luna, en misiones norteamericanas y de la antigua URSS, muestran que la distancia Tierra-Luna aumenta a razón de 3,8 cm/año.

La disminución de la velocidad angular de rotación de la Tierra y, en consecuencia, el paulatino aumento de la distancia entre la Luna y la Tierra, se deben a la enorme disipación de energía que se produce por la fricción del flujo y reflujo de las mareas oceánicas con los fondos marinos.

Dado que la masa de la Tierra es considerablemente mayor que la de la Luna y que la distancia entre sus centros es mucho mayor que cualquiera de sus radios, permite considerar la Luna como una partícula (puntual) de masa M_L que describe una órbita circular de radio R en torno al centro de la Tierra. En la figura 2 se representa a escala el sistema Tierra-Luna.

Fig. 2

Suponga la Tierra esférica, con su eje de rotación perpendicular al plano de la órbita lunar, y que la pequeña velocidad con la que la Luna se aleja de la Tierra ha permanecido constante a lo largo del tiempo. Tenga en cuenta también que la Luna, vista desde la Tierra, presenta siempre la misma cara.

Con los datos que se indican al final del enunciado,

a) Determine la distancia actual entre la Tierra y la Luna, R, en función de la velocidad angular orbital de la Luna, ω, del radio de la Tierra, R_T, y de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, g. Calcule ω y R.

b) Calcule las velocidades angulares de la Tierra en torno a su eje en la actualidad, ω_T, y cuando el coral vivía. ω'_T.

c) Determine la distancia entre la Tierra y la Luna, R', en la época en la que vivió el coral, en función de las siguientes magnitudes: R, M_T, M_L, R_T, ω_T, ω'_T y ω. Calcule el valor de R'.

d) Haga una estimación de la "edad" del coral fósil, τ.

Datos:

Masas de la Tierra y de la Luna: $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg}$; $M_L = 7{,}35 \times 10^{22}\ \text{kg}$;

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}\ \text{m}$

Periodo de revolución de la Luna en torno a su eje: $T_L = 2{,}36 \times 10^{6}\ \text{s}$

Periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol: $T = 3{,}16 \times 10^{7}\ \text{s}$

Día sidéreo: $T_T = 8{,}64 \times 10^{4}\ \text{s}$

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Ayudas:

- De acuerdo con el modelo propuesto (Tierra rotatoria con su centro fijo y la Luna como masa puntual) el momento angular total del sistema respecto al centro de la Tierra es igual a la suma de los momentos angulares de los movimientos, de la Luna en torno a la Tierra y el de rotación de la Tierra en torno a su eje. Si el sistema está aislado, tal como se considera al sistema Tierra-Luna en este problema, su momento angular total debe conservarse.
- Para una esfera de masa m y radio a que gira con velocidad angular Ω en torno a un eje que pasa por su centro (figura 3), el módulo de su momento angular respecto a dicho centro es

  $$L_0 = I\,\Omega$$

  donde I es el llamado momento de inercia respecto a dicho eje, cuyo valor es

  $$I = \frac{2}{5} m\, a^2 .$$

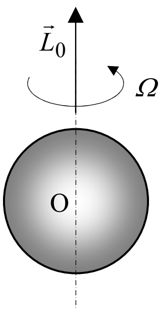

Fig.3

Solución

a) De acuerdo con el modelo que sugiere el enunciado y representado en la figura 2, la ecuación del movimiento de la Luna, considerada como una partícula de masa M_L, que describe una órbita de radio R en torno a la Tierra es,

$$G\frac{M_T M_L}{R^2} = M_L R\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{G\frac{M_T}{R^3}} \qquad (1)$$

Como la aceleración de la gravedad es

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = R_T\sqrt{\frac{g}{R^3}}$$

por lo que

$$\boxed{R = \left(\frac{R_T^2 g}{\omega^2}\right)^{1/3}}$$

Dado que la Luna presenta siempre la misma cara, la velocidad angular de rotación de la Luna debe ser igual a su velocidad angular orbital, es decir

$$\omega = \frac{2\pi}{T_L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 2{,}66\times10^{-6}\ \text{rad/s}}$$

por lo que el valor de R es

$$\boxed{R = 3{,}83\times10^{8}\ \text{m}}$$

b) La actual velocidad angular de la Tierra en torno a su eje es $\omega_T = 2\pi / T_T$. Como las estrías del coral indican que mientras la Tierra realizaba una revolución en torno al Sol daba 400 vueltas en torno a su eje, el periodo T' de revolución de la Tierra era

$$T' = \frac{3{,}16\times10^7}{400} = 7{,}90\times10^4\ \text{s}$$

y, en consecuencia, la velocidad angular de la Tierra cuando vivía el coral era

$$\omega'_T = \frac{2\pi}{T'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega'_T = 7{,}95\times10^{-5}\ \text{rad/s}}$$

c) Considerando la Tierra y la Luna como un sistema aislado, su momento angular se conserva, lo que significa que el momento angular respecto al centro de la Tierra en la actualidad debe ser igual que en la época en la que el coral estaba vivo. Por lo tanto, de acuerdo con el modelo que se propone, (Tierra rotatoria con su centro fijo y Luna masa puntual),

$$I_T\omega'_T + M_L R'^2\omega' = I_T\omega_T + M_L R^2\omega \qquad (2)$$

De (1), la velocidad angular orbital de la Luna, en la actualidad y en cuando vivía el coral son respectivamente,

$$\omega = R_T\sqrt{\frac{g}{R^3}}\ , \qquad \omega' = R_T\sqrt{\frac{g}{R'^3}}$$

Por lo que, sustituyendo en (2),

$$I_T\omega'_T + M_L R_T\sqrt{gR'} = I_T\omega_T + M_L R_T\sqrt{gR}$$

De la "ayuda", el momento de inercia es $I_T = 2M_T R_T^2 / 5$, con lo que resulta,

$$\boxed{R' = \frac{1}{g}\left[\sqrt{gR} - \frac{2M_T R_T}{5M_L}\left(\omega'_T - \omega_T\right)\right]^2}$$

Con los valores obtenidos para ω_T , ω'_T y ω y los datos del enunciado, se obtiene

$$\boxed{R' = 3{,}65 \times 10^8 \text{ m}}$$

De acuerdo con el enunciado, la velocidad con la que la Luna se aleja de la Tierra es constante y de valor $v = 3{,}8\,\text{cm/año} = 1{,}2 \times 10^{-9}$ m/s. La "edad" del coral fósil puede estimarse como el tiempo que ha transcurrido desde que la distancia Tierra-Luna era *R´* hasta la actual *R*, es decir,

$$\tau = \frac{R - R'}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 1{,}5 \times 10^{16} \text{ s}}$$

En años es

$$\tau = \frac{1{,}5 \times 10^{16}}{365 \times 24 \times 60 \times 60} = 4{,}8 \times 10^8 \text{ años} = 480 \text{ millones de años}$$

Realmente es algo menor puesto que en aquella época, el número de días por año era superior a 365, tal como se indica en la introducción del enunciado. Por lo tanto corresponde o está cercano al devónico inferior.