P1. ***Feel free, feel zero-g!***

El título de este problema hace alusión a la campaña que, desde hace algunos años, promueve la Agencia Espacial Europea (ESA) y que permite que grupos de jóvenes estudiantes europeos realicen experimentos diseñados por ellos mismos en condiciones de *gravedad aparente* nula. La foto de la figura 1 corresponde a un grupo de la Universidad de Zaragoza en la campaña 2006, a bordo de un avión Airbus A300 preparado para tal fin (figura 2).

Fig. 1

Fig. 2

La descripción de este tipo de vuelos, comúnmente denominados "parabólicos", se representan esquemáticamente en la figura 3 y es la siguiente: en un principio el avión vuela horizontalmente a su velocidad máxima hasta un punto A. Después se eleva, y cuando alcanza con un ángulo de 45º una altura, $h_B \approx 25.000$ ft[1] sobre el nivel del mar (punto B), reduce la potencia de los motores hasta un mínimo suficiente para contrarrestar la disipación de energía producida por la resistencia del aire. En esta primera fase del vuelo AB, que dura un tiempo t_{AB} = 20 s, los pasajeros sienten que su "peso" casi se duplica. A partir de B el vuelo puede considerarse libre, ¡feel free! y, por tanto, la trayectoria que describe es parabólica (de ahí el nombre que reciben estos vuelos). El vértice de la parábola (punto C) se encuentra a una altura, $h_C \approx 28.000$ ft. Posteriormente, ya iniciado el descenso del avión, en el punto D, situado a una altura similar a la de B, se incrementa de nuevo la potencia de los motores para permitir que en el punto E el aparato recupere el vuelo horizontal. Durante el trayecto B-C-D tanto los pasajeros como la carga transportada se encuentran como si la gravedad se hubiese anulado, ¡feel zero-g! Sin embargo, durante el trayecto DE, cuya duración es también análoga a la del trayecto AB, sienten de nuevo que su peso casi se duplica.

Estas maniobras se repiten 30 veces en cada vuelo, que tiene una duración total de unas dos horas, brindando la oportunidad de realizar interesantes experiencias en ingravidez, imposibles de conseguir en laboratorios en Tierra.

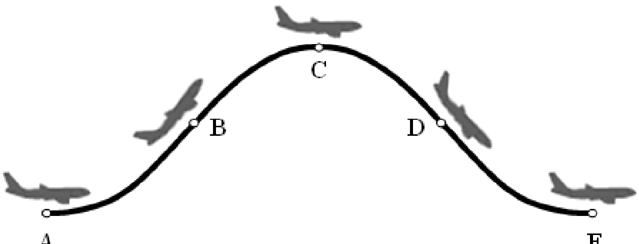

Fig. 3

El concepto de “gravedad aparente” al que antes se ha hecho referencia, requiere cierta explicación. Por esta razón, antes de plantear las cuestiones relativas al problema del “vuelo parabólico”, se propone resolver el siguiente ejercicio:

Del extremo inferior de un dinamómetro sujeto al techo de un ascensor se suspende un cuerpo de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$. Como la escala del dinamómetro nos indica, en newton, la fuerza que el resorte ejerce sobre la masa suspendida, cuando el ascensor está en reposo la indicación numérica de dicha escala coincidirá con el valor numérico de la aceleración de la gravedad.

Más en general, la indicación en la escala del dinamómetro cuando la masa suspendida de su extremo es $m = 1\,\mathrm{kg}$, nos proporciona el valor numérico de lo que se denomina *gravedad aparente*, g_a.

Según esto, ¿cuál es la gravedad aparente en los siguientes casos:

A1) Ascensor que, partiendo del reposo, inicia un movimiento de subida con aceleración constante, a.

A2) Ascensor que, moviéndose hacia arriba, frena con aceleración constante a.

A3) Ascensor que, partiendo del reposo, inicia un movimiento de bajada con aceleración constante, a.

A4) Ascensor que, moviéndose hacia abajo, frena con aceleración constante a.

Con referencia al “vuelo parabólico”, obtenga las expresiones analíticas y estime los valores correspondientes de las siguientes magnitudes:

B1) La velocidad del avión en el punto B, v_B.

B2) Los valores de la gravedad aparente media, g_{AB} y g_{DE}, en los trayectos AB y DE, respectivamente.

B3) El tiempo del que disponen los estudiantes para realizar sus experiencias con gravedad aparente nula en cada maniobra.

Nota:

Considere que el valor de la aceleración de la gravedad en puntos próximos a la superficie terrestre es $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

---

[1] En aeronáutica se usan asombrosamente las unidades anglosajonas (*imperial units*). La equivalencia del pie, “foot” o abreviadamente ft es $1\mathrm{ft} = 0{,}30480\ \mathrm{m}$

Solución

Ejercicio previo:

La escala del dinamómetro marca la fuerza (elástica), F_e, que el resorte ejerce sobre la masa suspendida m, cuyo peso es mg_0.

A1) Cuando el ascensor que parte del reposo, inicia un movimiento de subida con aceleración constante, a, la 2ª ley de Newton nos permite escribir:

$$F_e - mg_0 = ma$$

Como m = 1 kg, la indicación numérica de la escala del dinamómetro nos dará el valor de la gravedad aparente. Por tanto:

$$\boxed{g_a = F_e / m = g_0 + a} \qquad (1)$$

A2) Cuando el ascensor que está moviéndose hacia arriba, frena con aceleración constante a:

$$F_e - mg_0 = m(-a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_a = F_e / m = g_0 - a} \qquad (2)$$

A3) Cuando el ascensor inicia un movimiento de bajada con aceleración a constante:

$$F_e - mg_0 = m(-a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_a = F_e / m = g_0 - a} \qquad (3)$$

A4) Cuando el ascensor que está moviéndose hacia abajo, se detiene con aceleración constante a:

$$F_e - mg_0 = ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_a = F_e / m = g_0 + a} \qquad (4)$$

Ejercicio del "vuelo parabólico":

B1) El trayecto del avión desde A hasta B, en el que gana una altura $h_B - h_A$, lo realiza a costa de la potencia que generan sus motores. Por ello, en este trayecto no se conserva la energía mecánica y en consecuencia no se puede deducir la velocidad en B a partir de la velocidad en A que, por cierto, ni siquiera es un dato del problema.

Sin embargo, y para todos los efectos, en el punto B es como si el avión parara sus motores e iniciara un vuelo libre, con una velocidad inicial v_B que forma un ángulo φ con la horizontal (el bien conocido "tiro oblicuo"), como se muestra en la figura 4.

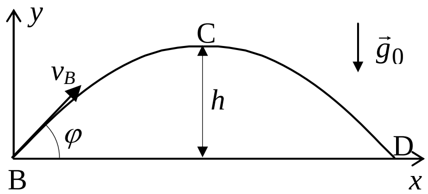

Fig. 4

Omitiendo detalles y comentarios, las expresiones básicas del tiro oblicuo son las siguientes:

Componentes de la aceleración del "proyectil" (en nuestro caso, del propio avión): $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g_0 \end{cases}$

Componentes de la velocidad: $\begin{cases} v_x = v_B \cos\varphi \\ v_y = v_B \operatorname{sen}\varphi - g_0\, t \end{cases}$

Trayectoria: $\begin{cases} x(t) = v_B\, t \cos\varphi \\ y(t) = v_B\, t \operatorname{sen}\varphi - \dfrac{1}{2} g_0\, t^2 \end{cases}$

En el punto C la velocidad del avión es horizontal, $v_y = 0$. Si t_{BC} es el tiempo que dura el vuelo entre B y C, tendremos,

$$t_{BC} = \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{g_0} \qquad (5)$$

Como $y(t_{BC}) = h$, siendo $h = h_C - h_B$, resulta

$$\boxed{v_B = \frac{\sqrt{2 g_0 h}}{\operatorname{sen} \varphi}}$$

De acuerdo con el enunciado,

$$h = h_C - h_B = 3{,}0 \times 10^3 \text{ ft} = 910 \text{ m}, \ \varphi = 45^\circ \ \text{y} \ g_0 = 9{,}81 \text{ m/s}^2 .$$

Por lo que

$$\boxed{v_B = 190 \text{ m/s} = 680 \text{ km/h}}$$

B2) La componente vertical de la aceleración media del avión en el trayecto AB es el cociente entre la diferencia de las componentes verticales de la velocidad en B y en A (que es nula) y el tiempo de vuelo, t_{AB}, entre A y B,

$$\bar{a}_{AB} = \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{t_{AB}}$$

Como $t_{AB} = 20 \text{ s}$, $\bar{a}_{AB} = 6{,}7 \text{ m/s}^2 = 0{,}68\, g_0$

Por lo que, teniendo en cuenta la expresión (1) obtenida en A3, la gravedad aparente en el avión será

$$g_{AB} = g_0 + \bar{a}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{AB} = g_0 + \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{t_{AB}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{AB} = 1{,}7\, g_0}$$

En el descenso DE del avión la aceleración vertical media es el cociente entre la diferencia de las componentes verticales de la velocidad en E (que es nula) y en D, que por simetría es la misma que en B pero en sentido contrario, dividido por el tiempo de vuelo entre ambos puntos que, según el enunciado, es prácticamente el mismo que entre Ay B, por lo tanto,

$$\bar{a}_{DE} = \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{t_{AB}} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_{DE} = 0{,}68\, g_0$$

De acuerdo con la expresión (4), la gravedad aparente en DE es

$$g_{DE} = g_0 + \bar{a}_{DE} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{DE} = g_0 + \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{t_{AB}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{DE} = 1{,}7\, g_0}$$

B3) El tiempo que trascurre con gravedad aparente nula, $t_{g=0}$ corresponde al vuelo libre parabólico propiamente dicho, es decir, al trayecto BCD . En él la aceleración del avión es $-g_0$, por lo que la gravedad aparente será:

$$g_{BCD} = g_0 + (-g_0) = 0$$

En este trayecto el interior del avión se convierte en un recinto que permite experimentar en estado de ingravidez durante el tiempo $t_{g=0}$.

Este tiempo es el doble que el que trascurre entre B y C, dado por la expresión (5). En definitiva,

$$t_{g=0} = 2 t_{BC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{g=0} = 2 \frac{v_B \operatorname{sen} \varphi}{g_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{g=0} = 27 \text{ s}}$$