P 1. Murcia: Sol, mar y salinas.

La Región de Murcia disfruta de un privilegiado clima mediterráneo. Goza de inviernos suaves y veranos calurosos, teniendo en promedio 300 días de sol al año. Gracias a ello gran parte de su territorio es un vergel: la *huerta murciana*. Sin embargo, sus recursos hídricos no son especialmente abundantes, las precipitaciones son escasas y concentradas en pocos días. Por ello, a lo largo de toda su historia, los murcianos han sabido aprovechar hasta la última gota de agua, como lo demuestran los numerosos ingenios hidráulicos que han construido: molinos, norias, acequias, azudes, etc., parte de los cuales todavía están en uso. Podemos mencionar los molinos existentes en el río Segura, de visita obligada en el centro de la ciudad de Murcia, y las norias de Abarán y Alcantarilla.

Por otra parte, también han sabido aprovechar su abundante energía solar. Ejemplos de ello son los parques fotovoltaicos, entre los que destaca el existente en Jumilla, el mayor de Europa cuando fue inaugurado en 2008, y múltiples salinas como las de San Pedro del Pinatar en la laguna del Mar Menor, protagonista de este problema.

Refiriéndonos a la radiación solar, se denomina *constante solar* a la energía que, por unidad de tiempo y unidad de superficie normal a la dirección de propagación, llega a las capas altas de la atmósfera terrestre. Esta constante, que es una densidad superficial de potencia, o intensidad de energía, tiene por valor $k = 1{,}366\ \mathrm{kW/m^2}$. Debido a la absorción y difusión en la atmósfera, a la superficie de la Tierra sólo llega, en días soleados, una fracción $\beta = 0{,}5$ de dicha intensidad solar.

Para simplificar el problema admitiremos que la trayectoria aparente del Sol está en un plano perpendicular a la superficie de la Tierra[1].

En un día soleado, la energía que se recibe en la superficie de la Tierra depende de la *altura angular* del Sol, es decir del ángulo θ que se muestra en la figura 1. Naturalmente, este ángulo varía a lo largo del día.

a) Para un día soleado y para una “altura” angular del Sol, θ, determine la potencia P que deposita la radiación solar en un área S de la superficie terrestre.

b) Determine la potencia media, $\langle P \rangle$, que recibe la superficie S a lo largo de un día, es decir para $0 \le \theta \le \pi$.

Véanse las Notas 1 y 2 al final del ejercicio.

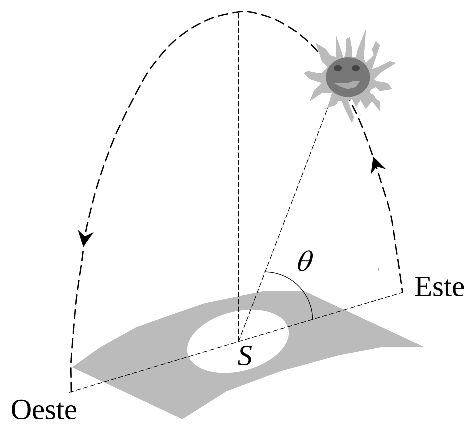

Fig.1

En las salinas, la energía solar se utiliza para evaporar el agua de mar y extraer la sal disuelta. El proceso es complejo y se lleva a cabo mediante la parcelación de las aguas en distintos estanques: almacenadores, calentadores y cristalizadores en los que se precipita la sal. Son estos últimos estanques los que centrarán la atención de este ejercicio.

Supongamos que los estanques de cristalización de las salinas de San Pedro tienen una profundidad media $h = 0{,}15\ \mathrm{m}$ y con una concentración de sal del 4,5% en masa, $c_m = 0{,}045$. En condiciones de presión y temperatura medias, la densidad del agua es $\rho = 1{,}03 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ y su calor de vaporización es $L = 2{,}4 \times 10^3\ \mathrm{kJ/kg}$.

c) Considerando que el tiempo medio de insolación en un día es $T_{1/2} = 12\ \text{horas}$, determine el número n de días soleados que se necesitan para evaporar el agua de los estanques de cristalización y calcule su valor.

[1] Realmente la latitud de Murcia es de unos 38º, y el ángulo que forma el plano ecuatorial de la Tierra con el de la eclíptica es de unos 23º. Por tanto, en verano, el plano de la órbita aparente del Sol forma un ángulo de unos 15º con la vertical.

Estudiemos ahora aspectos relativos a la emisión de energía por el Sol. Como se ha mencionado, la constante solar k es la densidad superficial de potencia que llega a las capas altas de la atmósfera terrestre. A partir de este dato y sabiendo que la distancia Tierra-Sol es $R = 1{,}49 \times 10^{11}$ m,

d) Determine la potencia total emitida por el Sol, P_S, y calcule su valor.

La energía que emite el Sol conlleva una disminución de su masa de acuerdo con la conocidísima fórmula de Einstein $E = mc^2$, donde c es la velocidad de la luz, $c = 2{,}998 \times 10^8$ m/s.

e) Determine la masa que pierde el Sol cada segundo, μ_S, y calcule su valor.

Por último, vamos a estudiar si esta pérdida de masa afecta de forma apreciable al radio de la órbita de la Tierra en torno al Sol.

f) Teniendo en cuenta la ley de Gravitación Universal y la conservación del momento angular de la Tierra respecto al Sol, determine la variación relativa del radio de la órbita terrestre, $\Delta R / R$, en función de la variación relativa de la masa del Sol, $\Delta M_S / M_S$.

g) Calcule la variación anual del radio de la órbita terrestre, sabiendo que la masa del Sol es $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

Nota 1 .- El valor medio de una función $f(x)$ en un intervalo $\Delta x = x_2 - x_1$ se define como

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

Geométricamente este valor medio coincide con la altura de un rectángulo de base Δx y cuya área sea igual a la comprendida entre la curva $f(x)$ y el eje X, entre x_1 y x_2, como se muestra en la figura 2.

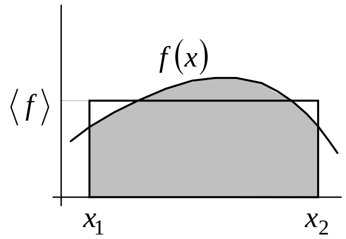

Fig. 2

Nota 2.-

$$\int \operatorname{sen}\alpha \, d\alpha = -\cos\alpha$$

$$\int \cos\alpha \, d\alpha = \operatorname{sen}\alpha$$

Solución

a) De acuerdo con el enunciado, la intensidad que llega a la superficie de la Tierra procedente del Sol es una fracción $\beta = 0{,}5$ de la constante solar.

$$k' = \beta k \qquad (1)$$

Para determinar la potencia instantánea que deposita la radiación sobre un área S cuando la altura del Sol es θ (figura 1 del enunciado), es preciso considerar la proyección de dicha superficie en dirección perpendicular a los rayos, como se muestra en la figura 3. Como $S' = S \operatorname{sen}\theta$, la potencia instantánea, P, en el área S, será

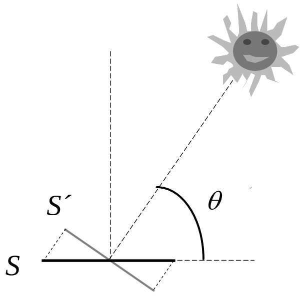

Fig.3

$$\boxed{P = \beta k S \operatorname{sen}\theta} \qquad (2)$$

b) Esta potencia P es función de θ, que varía a lo largo del día. La potencia media diaria se calcula, de acuerdo con la Nota 1 del enunciado, evaluando el valor medio de (2) desde que el Sol sale hasta que se pone, es decir desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.

$$\langle P \rangle = \beta k S \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle P \rangle = \frac{2}{\pi}\beta k S} \qquad (3)$$

c) El volumen de agua de mar en los estanques cristalizadores de las salinas de San Pedro es $V = h S$, donde S es ahora el área de dichos estanques. Por lo tanto la masa de agua de mar que contienen es $m = \rho h S$. Como la concentración de sal es $c_m = 0{,}045$, la masa de agua que hay que evaporar es

$$m_{agua} = \rho h S \left(1 - c_m\right)$$

Por lo tanto, la energía que se necesita para la evaporación es

$$W = L\, m_{agua} = \rho L h S \left(1 - c_m\right)$$

Como la potencia que recibe la salina es $\langle P \rangle$, durante un día soleado la energía absorbida es igual al producto de $\langle P \rangle$ por $T_{1/2} = 12\,\text{horas} = 4{,}32 \times 10^4\ \text{s}$. En consecuencia, el número de días soleados necesarios para extraer la sal será

$$n = \frac{L h S \rho \left(1 - c_m\right)}{\langle P \rangle\, T_{1/2}} = \frac{L h S \rho \left(1 - c_m\right)\pi}{2 \beta k S T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{L h \rho \left(1 - c_m\right)\pi}{2 \beta k T_{1/2}}}$$

Teniendo en cuenta los datos numéricos del enunciado, resulta

$$\boxed{n = 19\ \text{dias}}$$

d) Dado que el Sol emite en todas las direcciones, si la constante solar k es la energía que llega a la Tierra por unidad de tiempo y unidad de superficie, a una esfera de radio R, igual a la distancia Sol-Tierra y centrada en el Sol le llegará toda la energía que el Sol emite por segundo, es decir, la potencia P_S que nos piden.

$$P_S = 4\pi R^2 k \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_S = 3{,}8 \times 10^{20}\ \text{MW}}$$

e) De acuerdo con el resultado anterior, en un intervalo de tiempo τ el Sol emite una cantidad de energía,

$$W_S = 4\pi R^2 k \tau$$

Y en virtud de la famosa ecuación de Einstein, esta emisión de energía supone que el Sol pierde en ese intervalo de tiempo una masa

$$\Delta M_S = \frac{W_S}{c^2} = \frac{4\pi R^2 k \tau}{c^2}$$

Por tanto en un tiempo $\tau = 1\,\text{s}$ el Sol pierde una masa

$$\boxed{\mu_S = \frac{4\pi R^2 k}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_S = 4{,}2\times 10^9\ \text{kg/s}}$$

f) La ley de gravitación proporciona la relación entre la masa del Sol y el radio orbital R de la Tierra. Si M_T es la masa de la Tierra y ω su velocidad angular orbital, se tiene

$$G\frac{M_S M_T}{R^2} = M_T\,\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad M_S = \frac{\omega^2}{G}R^3 \qquad (4)$$

Nótese que una variación de M_S afecta a R y a ω, pero estas dos variables no son independientes. La fuerza de interacción gravitatoria es central, luego debe conservarse el momento angular de la Tierra respecto al Sol

$$L_0 = M_T\,\omega R^2 \qquad (5)$$

Eliminando ω entre (4) y (5), queda

$$M_S = \frac{L_0^2}{G M_T^2}\frac{1}{R} = \gamma\frac{1}{R} \qquad (6)$$

donde $\gamma = L_0^2 / G M_T^2$ es una constante. Tomando incrementos en (6)

$$\Delta M_S = -\gamma\frac{\Delta R}{R^2} \qquad (7)$$

El signo negativo de (7) significa que una perdida de masa del Sol implica un aumento de la distancia Sol-Tierra. ¡Nos alejamos del Sol poco a poco!

Dividiendo ambos miembros de (7) por la masa (actual) del Sol y teniendo en cuenta (6), se obtiene

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta M_S}{M_S}}$$

g) En un tiempo $T = 1\,\text{año} = 3{,}15\times 10^7\ \text{s}$ la pérdida de masa del Sol es

$$\Delta M_S = -\mu_S T = -1{,}3\times 10^{17}\ \text{kg}$$

Y el aumento de la distancia Tierra-Sol resulta

$$\Delta R = -R\frac{\Delta M_S}{M_S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta R = 1{,}0\ \text{cm}}$$