P1. Un deporte de invierno: los saltos de esquí.

En esta espectacular modalidad deportiva, los espectadores se mantienen en vilo desde que el atleta inicia el descenso por la pista hacia el trampolín hasta que, tras saltar al "vacío", realiza un estético vuelo, aterriza suavemente, frena y se detiene. Este atleta, mediante un largo y duro entrenamiento, ha adquirido la suficiente destreza para lograr que la física esté de su parte permitiéndole mejorar sus marcas.

El perfil de la pista de saltos, mostrado en la figura 1, presenta cuatro partes: la primera es la *zona de aceleración*, en la que los saltadores que han partido de alguna de las *salidas escalonadas*, sin velocidad inicial, descienden por una pronunciada pendiente hasta el *trampolín*, en el que la pendiente se reduce hasta un ángulo α. En el borde S del trampolín, el saltador inicia el vuelo sobre la *zona de salto*, que tiene forma aproximadamente parabólica y una longitud L característica de la instalación: se habla así de pistas de 50, 80 ó 90 m.

La tercera zona, P - K, es la *de aterrizaje*, de longitud M y pendiente constante de ángulo β. A partir del límite K de esta región, el denominado *punto crítico*, se inicia la cuarta zona, *de frenado*, en la que no debe producirse el aterrizaje pues disminuye rápidamente la pendiente y el impacto sería peligroso. Según sean las condiciones meteorológicas, el estado de la pista y la calidad de los competidores, los jueces deciden el punto de partida adecuado (una de las salidas escalonadas) para conseguir que el aterrizaje se realice siempre en la zona adecuada, y no en la de frenado. En concreto, los jueces fijan la altura h_0 del punto de salida respecto al borde S del trampolín.

Los principales parámetros de un gran trampolín, ($L \approx 90$ m), se encuentran indicados en el cuadro de datos de la figura 1.

a) Suponiendo que en el descenso por la zona de aceleración (desde la salida hasta el punto S), el rozamiento con el suelo y el aire disipan una energía Q que es igual al 20 % de la energía mecánica inicial, determine y calcule el módulo de la velocidad de despegue del saltador, v_0, sabiendo que ha iniciado el descenso, sin velocidad inicial, desde una salida con la altura h_0 dada en el cuadro de valores.

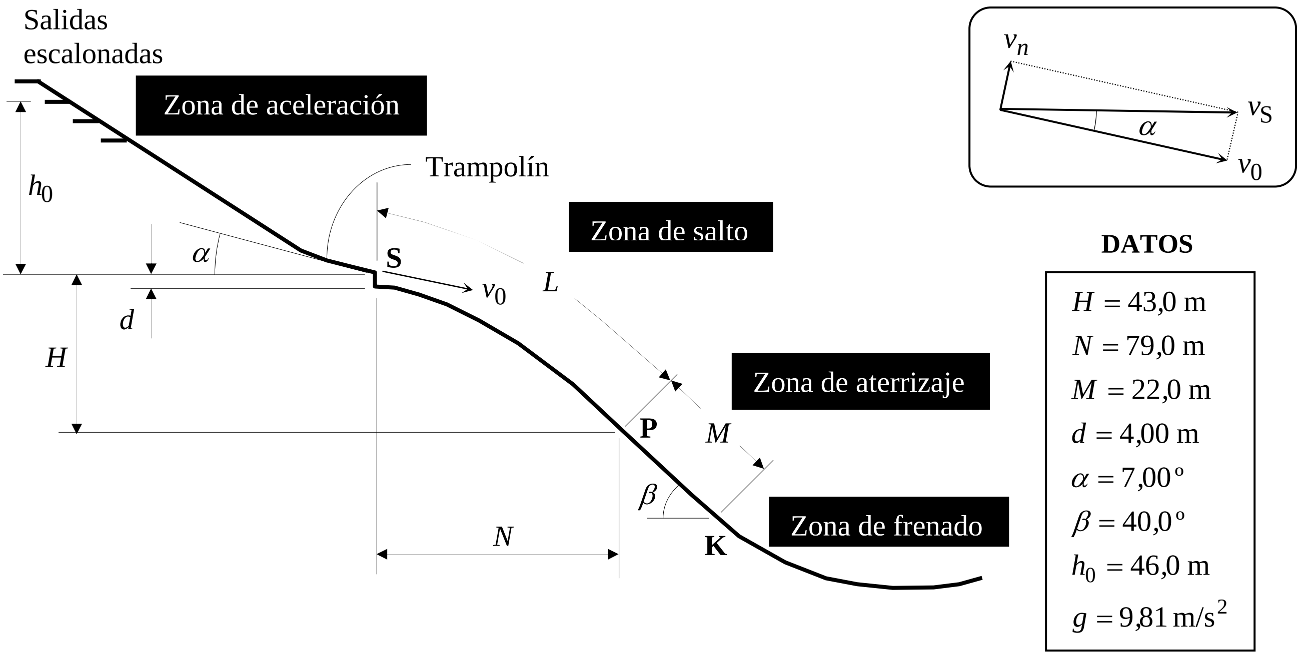

Fig. 1

A pesar de que el trampolín tiene una pendiente final descendente α, la velocidad real de salida del saltador, v_S, es prácticamente horizontal, pues se da un impulso perpendicular a la pista justo antes de iniciar el vuelo. Para ello, el saltador desciende con las piernas flexionadas y las extiende en el extremo final del trampolín, haciendo un gesto similar al de un salto, sin carrerilla, perpendicular al suelo. Así, además de descender en una postura más aerodinámica, consigue imprimirse una velocidad v_n perpendicular al trampolín y alargar el salto. (Observa el diagrama vectorial indicado en la figura 1).

b) Calcule cuál debe ser el valor de la velocidad v_n y compruebe si podrá conseguirla un atleta capaz de realizar un salto vertical de altura $h_e = 0{,}60$ m , ¡sin carrerilla!

Suponga que la velocidad de salida es exactamente horizontal y no tenga en cuenta los efectos de la fuerza de fricción con el aire ni los de sustentación debidos a la aerodinámica del saltador. (En la práctica el segundo efecto domina sobre el primero, de forma que los saltos reales son algo más largos que los idealizados parabólicos).

c) Obtenga la ecuación de la trayectoria que hipotéticamente describirá el saltador, referida al sistema de coordenadas OXY indicado en la figura 2 que se encuentra en la "hoja de respuestas" adjunta. En dicha figura se representa también el perfil de la pista (sombreado), desde el punto de salida S del trampolín hasta el punto crítico K.

d) Sobre la figura 2, haga una representación gráfica de la trayectoria y determine aproximadamente el punto C de aterrizaje, con sus correspondientes coordenadas x_C e y_C.

e) Determine las componentes de la velocidad v_f del saltador cuando toca la pista en la zona de aterrizaje. Calcule el ángulo φ que forma la velocidad con el eje OX.

f) Determine y calcule el ángulo, ϕ, que forma la velocidad final v_f con la pista.

Hoja de respuestas

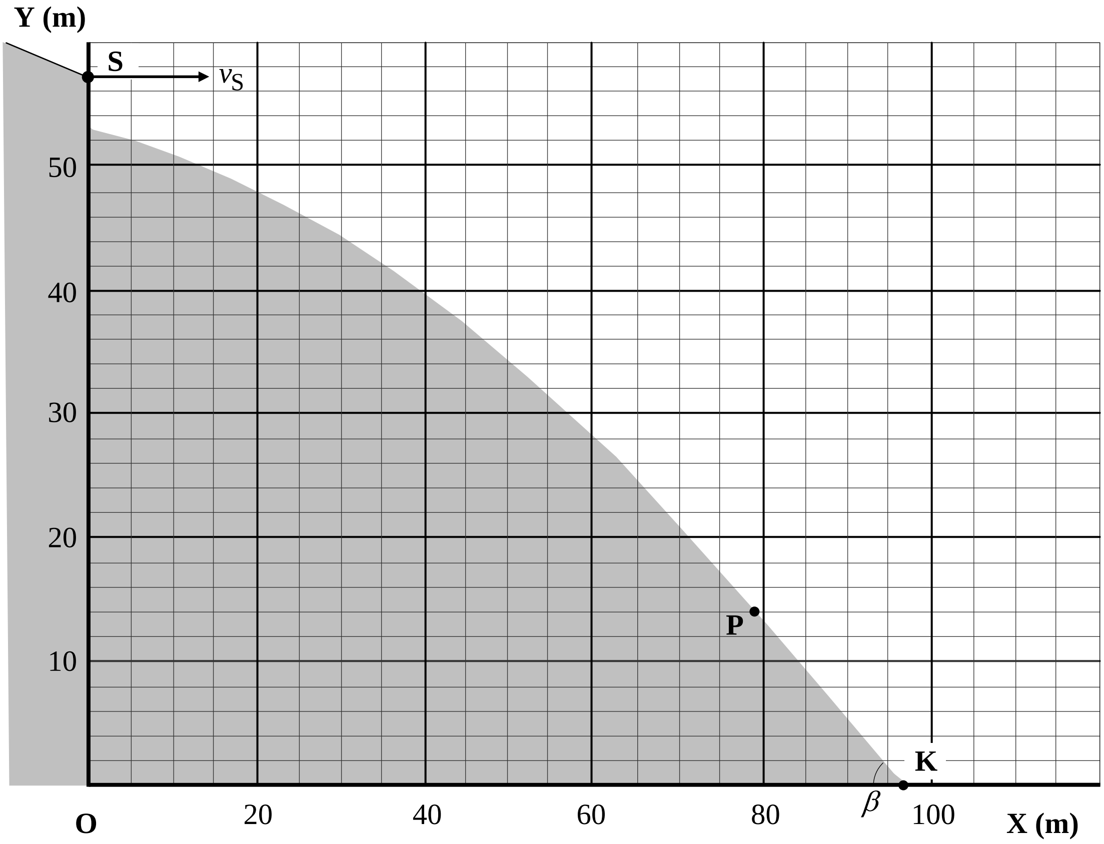

Fig. 2

Solución

a) El saltador inicia el descenso sin velocidad inicial, desde una altura h_0 respecto al borde de salida del trampolín, S. Se sabe que la energía disipada, Q, es el 20 % de la energía mecánica inicial. Si se toma como referencia para la energía potencial gravitatoria la horizontal por el punto S, se tiene

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + Q \qquad \text{donde} \qquad Q = 0{,}2\, mgh_0$$

Por tanto

$$v_0 = \sqrt{1{,}6\, gh_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_0 = 26{,}9 \text{ m/s}}$$

b) Del diagrama de velocidades de la figura del enunciado se deduce que

$$v_n = v_0\, tg\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_n = 3{,}3 \text{m/s}}$$

¿Es el saltador capaz de *imprimirse* esta velocidad, teniendo en cuenta que en los entrenamientos en el gimnasio es capaz de saltar en vertical una altura $h_e = 0{,}6$ m? Teniendo en cuenta de nuevo la conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = m\, g\, h_e$$

De donde

$$v_e = \sqrt{2gh_e} = 3{,}4 \text{ m/s} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_e > v_n}$$

En conclusión, el saltador SI que es capaz de salir de la pista de saltos con velocidad horizontal.

c) Necesitamos deducir la ecuación de la trayectoria que seguirá el saltador, considerando que inicia el salto en el extremo del trampolín con una velocidad inicial horizontal v_S , de módulo

$$v_S = \sqrt{v_0^2 + v_n^2} \qquad \Rightarrow \qquad v_S = 27{,}1 \text{ m/s}$$

Emplearemos el sistema de coordenadas dado en la figura 2, con eje vertical OY pasando por el punto de salida y eje horizontal, OX, pasando por el punto K. En la figura 2 se aprecia que la ordenada del punto de salida S es aproximadamente

$$y_S \approx 57 \text{ m}$$

De una forma más precisa, la ordenada inicial puede deducirse a partir de los datos del enunciado

$$y_S = H + M \operatorname{sen}\beta \qquad \Rightarrow \qquad y_S = 57{,}1 \text{ m}$$

Suponiendo que el salto se realiza en el vacío, la trayectoria del saltador sería la de un "tiro parabólico" desde el punto S de coordenadas $x_S = 0$ e $y_S = 57{,}1$ m, con una velocidad inicial horizontal, de módulo $v_S = 27{,}1$ m/s .

En consecuencia, las ecuaciones del movimiento son

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_S \\ v_y &= -g\, t \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} x &= v_S\, t \\ y &= y_S - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Eliminando el tiempo en(2) se obtiene la ecuación cartesiana de la trayectoria

$$y = y_S - \frac{g}{2v_S^2} x^2$$

Teniendo en cuenta los valores numéricos, en unidades del SI, la ecuación resulta

$$\boxed{y = 57{,}1 - 6{,}69\times 10^{-3}\,x^2} \qquad (3)$$

d) En la Tabla I se muestran las coordenadas de una serie de puntos deducidos por medio de (3). Con ellos se puede trazar, de forma aproximada, la trayectoria del salto sobre la figura 3, (análoga a la figura 2, que se encuentra en la “hoja de respuestas”).

Tabla 1					
x (m)	20	40	60	80	92,4
y (m)	54,5	46,4	33,0	14,3	0

La intersección de la trayectoria con el área sombreada del perfil, permite estimar que el punto C de “toma de tierra” está próximo a P y dentro de la zona de aterrizaje. Concretamente las coordenadas de C son

$$x_C = 82{,}0\ \text{m}\ ; \quad y_C = 12{,}0\ \text{m} \qquad (4)$$

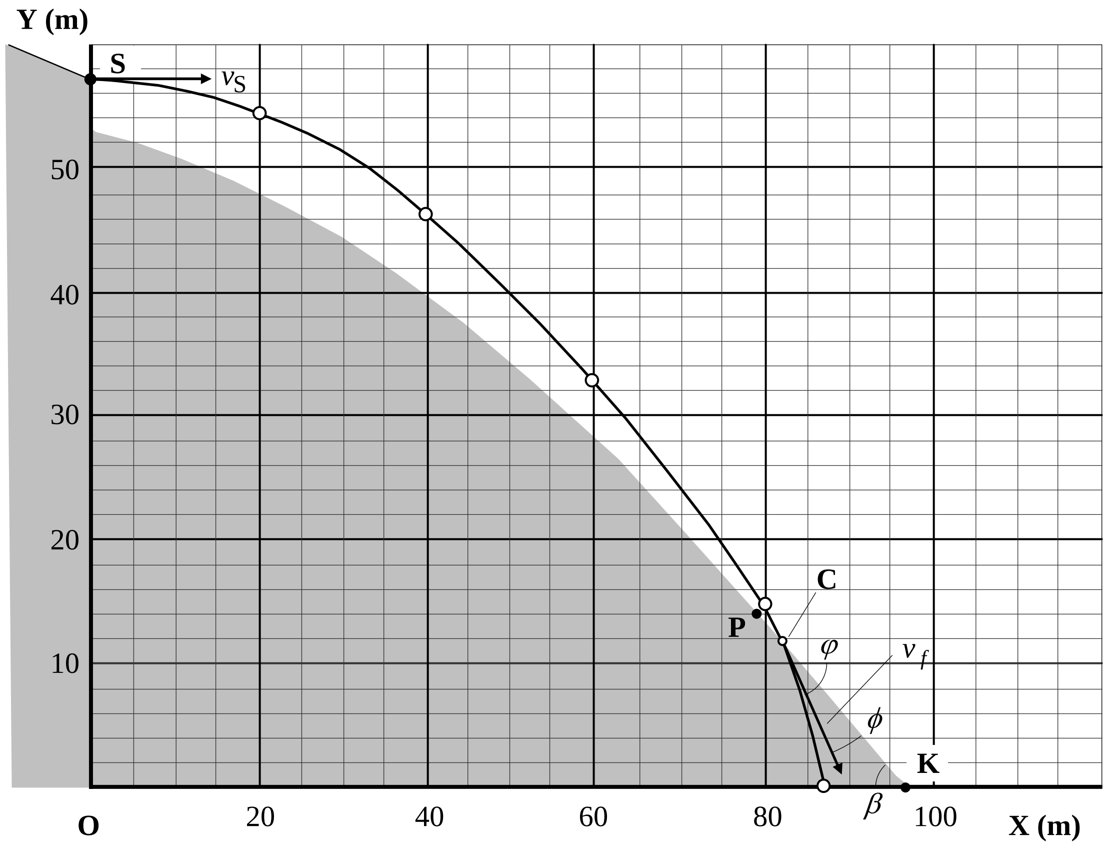

Fig. 3

e) De (1) y (2) se tiene

$$v_x = v_S\ ;\ v_y = -\frac{g}{v_S}\,x$$

Luego en el punto C se tiene

$$\boxed{\begin{aligned} v_{fx} &= v_S \\ v_{fy} &= -\frac{g}{v_S}\,x_C \end{aligned}}$$

El ángulo φ que forma la velocidad, v_f, al llegar a C, con la horizontal, viene dado por

$$\varphi = artg \frac{v_{yf}}{v_{xf}}$$

Tomando el valor absoluto de v_{yf}, la expresión del ángulo φ es

$$\varphi = artg \frac{g\, x_C}{v_S^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 47{,}7^{\circ}}$$

f) El ángulo, ϕ, que forma la velocidad final con la pista en el punto de aterrizaje es, por fin

$$\phi = \varphi - \beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = 7{,}7^{\circ}}$$