P1 La cuerda: compañera inseparable del alpinista.

Sense cap dubte, la joia del patrimoni natural de Lleida són les seves muntanyes i, molt especialment, el Parc Nacional d'Aigüestortes i Estany de Sant Maurici. Dos dels seus pics més emblemàtics són les agulles dels Encantats, de més de 2700 m d'alçada. Per això, els esports de muntanya tenen a Lleida un extraordinari arrelament, incloent-hi la seva variant més emocionant i arriscada, l'escalada.

Estany de Sant Maurici i Els Encantats

Las cuerdas de montaña, compañeras inseparables de los escaladores, esconden tras su aparente sencillez unas características extraordinarias logradas con una avanzada tecnología en la que la Física, como de costumbre, es la estrella invitada. Estas cuerdas deben soportar elevadas cargas, ser ligeras y flexibles, resistentes a los roces y cortes, estables con la temperatura... y tienen que ser elásticas, es decir extensibles. En este ejercicio vamos a estudiar esta última propiedad y sus límites.

Comencemos con una descripción del uso de la cuerda como elemento protector ante posibles caídas. En la figura 1 se muestra a un escalador que ha llegado al punto C de una pared tras completar un largo de su cuerda. Ha tenido la fundamental precaución de atar firmemente un extremo de la cuerda a la fijación A y pasarla por una anilla (mosquetón) colocada en otra fijación en B. Las distancias entre B y C y entre A y B son respectivamente l_1 y l_2. La longitud activa de la cuerda es $L = l_1 + l_2$

Si, alcanzado el punto C, el escalador tiene la mala pata de caerse, el recorrido de su *vuelo* será $h = 2l_1$ y el *tirón* que sufra cuando la cuerda lo frene será menor que el que sufriría si no hubiese puesto el mosquetón en B, ya que entonces el recorrido hubiese sido $2L$, mayor que h.

En la jerga montañera se define el *factor de caída*, f :

$$f = \frac{h}{L} = \frac{2l_1}{l_1 + l_2}$$

Este factor, que puede tomar valores entre 0 y 2, es un concepto muy importante en escalada ya que representa una medida de la "dureza" de las caídas:

- $f < 1$: caída relativamente suave (el escalador estaba cercano a la fijación B).
- $f = 1$: caída dura (B está a mitad del largo).
- $f > 1$: caída muy dura (el escalador estaba lejos de B).
- $f = 2$: la peor caída posible (sin fijación entre el escalador y el punto A de reunión). Se deben evitar a toda costa. Son muy peligrosas para el escalador y afectan a la durabilidad de la cuerda y de las fijaciones.

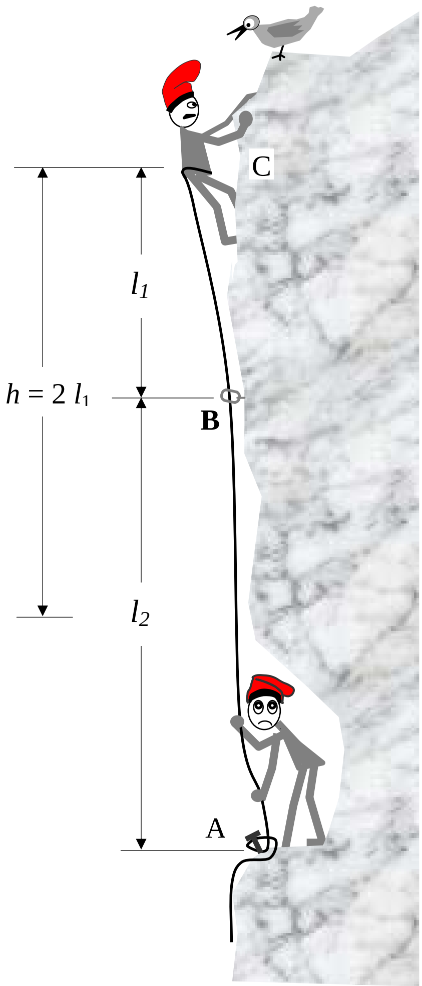

Fig. 1

La protección que la cuerda brinda al escalador consiste en frenar su caída, es decir, convertir su energía mecánica en elástica, alargándose la cuerda una cierta longitud x, como si de un muelle se tratase. Este modelo físico *cuerda* ≡ *muelle* es válido siempre que el alargamiento x esté comprendido en el intervalo $0 \le x \le x_e$, donde x_e es el llamado *límite elástico*. La Unión Internacional de Asociaciones de Alpinismo (UIAA) exige a los fabricantes de cuerdas que, como máximo, $x_e / L = 0{,}08$, es decir x_e no debe superar el 8 % de L.

Para alargamientos superiores a x_e el modelo cuerda ≡ muelle deja de funcionar. La tensión no es proporcional al alargamiento sino que toma un valor máximo, F_m, que se mantiene casi constante hasta que, para alargamientos del orden del 50 %, la cuerda se rompe (límite de rotura, $x_r \approx 0{,}5\,L$).

El valor de esta tensión máxima, F_m, también lo impone la UIAA: no debe exceder[1] los 1200 daN para cuerdas estándar (1 daN = 1decaNewton = 10 N).

Todo este proceso se resume en la gráfica de la figura 2, donde se representa, de forma idealizada, la tensión de una cuerda estándar en función de su *alargamiento unitario*, x / L .

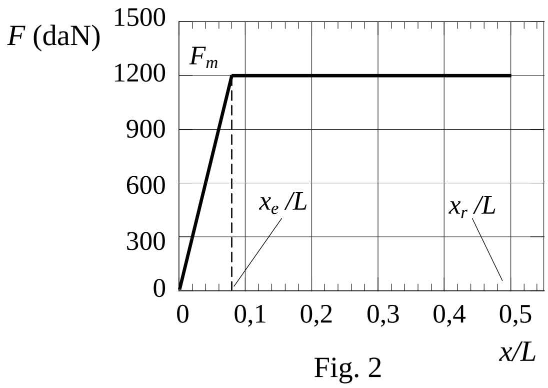

Fig. 2

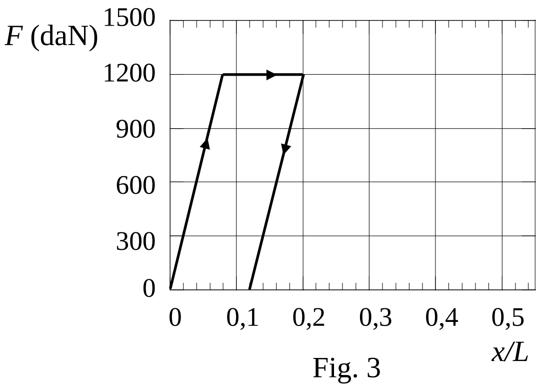

Fig. 3

En el intervalo de alargamientos $x_e \le x \le x_r$ el comportamiento de la cuerda tiene una importante peculiaridad: su deformación no es elástica sino *plástica*, es decir, la deformación alcanzada dentro de este intervalo es permanente, no desaparece al cesar la tensión. Por ejemplo, en la figura 3 se representa la gráfica correspondiente a una caída que supera el límite elástico, llegando hasta $x / L = 0{,}2$. Cuando la cuerda se relaje (cuando se anule la tensión) no recuperará la longitud inicial L sino que quedará con un alargamiento permanente del 12 %.

Este proceso de deformación plástica acorta la vida de la cuerda, y puede llegar a acortar dramáticamente la vida del escalador, ya que los alargamientos permanentes se van acumulando en sucesivas caídas, acercándose al fatídico límite de rotura.

Después de estas explicaciones, consideremos el caso de un escalador de masa M que sufre una caída de factor f. En el punto más bajo de la caída el alargamiento unitario de la cuerda es x / L y su tensión es F.

a) En el intervalo de validez del modelo elástico, es decir $x \le x_e$, obtenga la expresión del alargamiento unitario x / L en función de M, g, F y f.

Suponga en lo que sigue que un montañero de 80 kg usa una cuerda que puede soportar una tensión máxima $F_m = 1200$ daN y cuyo límites elástico y de rotura son $x_e / L = 0{,}08$ y $x_r / L = 0{,}5$.

b) ¿Cuál es el mayor factor f de las caídas que puede sufrir sin que su cuerda se deforme plásticamente?

c) ¿Cuál será la deformación plástica unitaria de la cuerda en una caída de factor $f = 2$?

d) ¿Cuántas caídas de tipo $f = 2$ podrá soportar la cuerda sin romperse?

---

[1] Este valor corresponde, aproximadamente, a la fuerza que actúa sobre una masa de 80 kg para que su aceleración sea de 15g, que es la máxima que un ser humano puede soportar durante un tiempo corto, sin sufrir graves daños.

Solución

a) Supongamos que el montañero se cae desde el punto C de la figura 4. Durante el recorrido de longitud $h = 2l_1$ la caída es libre, pero a partir del punto B' la cuerda comienza a estirarse y a frenar su caída. El descenso continúa hasta el punto B", donde el montañero se detiene (velocidad nula) y la cuerda se ha estirado una longitud máxima *x*.

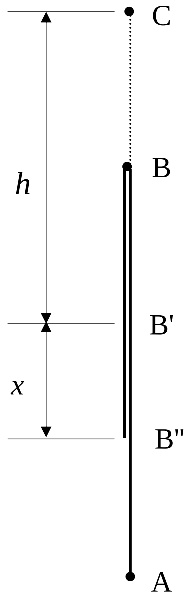

Fig. 4

Durante el recorrido CB' la única fuerza que actúa sobre el montañero es el peso, mientras que entre B' y B", además del peso, actúa la fuerza elástica. Ambas fuerzas son conservativas, por lo que la energía mecánica debe conservarse. En particular

Energía mecánica en C = Energía mecánica en B" (1)

Mientras los alargamientos de la cuerda no excedan el límite elástico, la cuerda equivale a un muelle de constante $K = F / x$, con una energía potencial elástica

$$U_e = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}Fx$$

Luego, tomando como nivel de referencia de energía potencial gravitatoria la horizontal en B", en virtud de (1) tendremos

$$Mg(h+x) = \frac{1}{2}Fx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2Mgh}{F-2Mg}$$

Dividiendo ambos miembros por *L* y teniendo en cuenta que $f = h / L$, se obtiene la expresión pedida

$$\boxed{\frac{x}{L} = \frac{2Mg\, f}{F-2Mg}} \qquad (2)$$

b) Si en la expresión anterior (2) se despeja el factor de caída *f*, se obtiene

$$f = \frac{F-2Mg}{2Mg}\frac{x}{L}$$

Con los datos del problema y considerando el máximo alargamiento unitario elástico, $x_e / L = 0{,}08$, se obtiene que el mayor factor de caída con deformación puramente elástica es

$$\boxed{f = 0{,}5}$$

c) Si la caída tiene un factor $f > 0{,}5$, la cuerda necesariamente sobrepasará su zona de comportamiento elástico, por lo que la deformación de la cuerda será la suma del alargamiento elástico, x_e, y del plástico, x_p (situación análoga a la de la figura 3). En esta caída el montañero recorre una distancia $2L + x_e + x_p$, con un variación de energía potencial gravitatoria

$$\Delta U = -Mg(2L + x_e + x_p)$$

Esta variación debe ser igual al trabajo realizado por la tensión de la cuerda a lo largo de los recorridos elástico y plástico, x_e y x_p, respectivamente

$$W_e = -\frac{1}{2}F_m x_e$$

$$W_e = -F_m x_p$$

Con lo que resulta

$$Mg(2L + x_e + x_p) = \frac{1}{2}F_m x_e + F_m x_p$$

Sustituyendo $x_e = 0{,}08\,L$ y despejando $x_p\,/L$, se obtiene

$$\frac{x_p}{L} = \frac{2{,}08\,Mg - 0{,}04\,F_m}{F_m - Mg}$$

y con los valores del enunciado resulta

$$\boxed{\frac{x_p}{L} = 0{,}10}$$

d) Al llevar este resultado a una gráfica como la de la figura 5, observaremos que en una caída de factor 2, con una cuerda nueva, el alargamiento total unitario es

$$\frac{x_e + x_p}{L} = 0{,}08 + 0{,}10 = 0{,}18$$

Esto supone un alargamiento del 18 %, que corresponde al punto S_1 de la figura 5. Como se ha superado el límite elástico, tras destensarse la cuerda no recuperará su longitud inicial, sino que quedará alargada de forma permanente un $10\,\%$, como puede apreciarse en dicha figura.

Si la misma cuerda vuelve a soportar una nueva caída de factor 2, un razonamiento análogo nos llevaría al alargamiento máximo del punto S_2 de la figura 5, y la deformación permanente de su longitud aumentaría hasta el 20 %. Se comprueba fácilmente que el límite de rotura de la cuerda, el fatídico 50 %, se supera durante la quinta caída. Por tanto, con $f = 2$,

$$\boxed{\text{El número máximo de caídas es cuatro}}$$

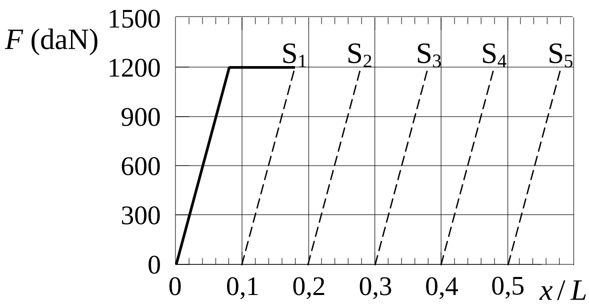

Fig. 5