P1. Olas de altura en Galicia.

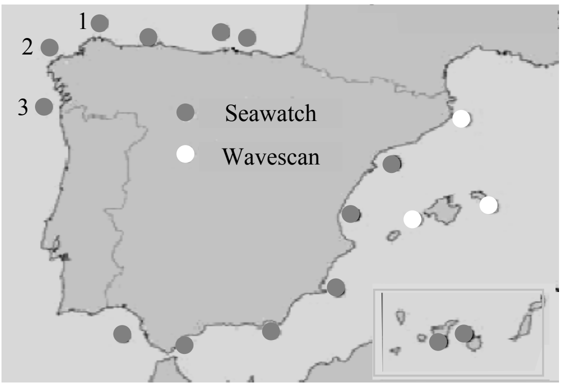
Olas de casi 13 metros sacuden Galicia / LA VOZ DE GALICIA - 2 de febrero de 2014

"El temporal en el mar que provocó la ciclogénesis explosiva Nadja, que se profundizó hasta los 954 milibares, volvió a registrar ayer, por segunda vez en menos de un mes, olas de impresionantes dimensiones, de hasta casi 13 metros de altura significante. Fue la marca alcanzada a las nueve de la noche en la boya de Estaca de Bares, que superó la del día de Reyes, cuando se rozaron los 12 metros. En la de cabo Silleiro se registraron cerca de 9 metros."

Antiguamente el oleaje se medía mediante estimaciones visuales, pero hoy en día se puede conocer con exactitud la altura de las olas gracias a los avances de la física y sus aplicaciones.

Para conocer los datos del oleaje en las costas y en las zonas marítimas españolas, contamos con las Redes de Medida de Puertos del Estado, en concreto con la Red costera de boyas, que proporciona datos en la línea de costa, y con la Red de boyas en aguas profundas, que informa del estado mar adentro.

Estas boyas, ancladas en el fondo marino, son verdaderas estaciones meteorológicas sobre la superficie del agua. Proporcionan en tiempo real datos como la velocidad y dirección del viento, la altura de las olas, el período del oleaje, la dirección de la corriente, la temperatura del mar, etc. La Red de aguas profundas en España consta de catorce boyas tipo *Seawatch* y tres boyas de tipo *Wavescan*.



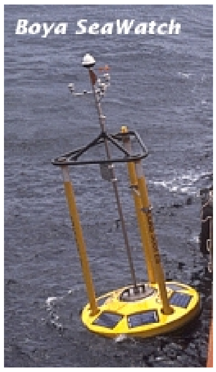


Fig. 1

En la costa gallega hay tres de ellas (figura 1):

(1) Boya de Estaca de Bares (profundidad del mar: 1800 m)

(2) Boya de Villano Sisargas (profundidad del mar: 386 m)

(3) Boya de Cabo Silleiro (profundidad del mar: 323 m)

Las olas son el fenómeno de propagación de ondas superficiales en el agua. Las boyas miden las elevaciones instantáneas de la superficie del mar respecto a su nivel medio. En este problema vamos a estudiar algunos aspectos de olas en aguas profundas de la costa gallega.

Asumiremos, por simplicidad, que las olas antes de "romper" en la costa se comportan como una onda sinusoidal, como la de la figura 2, con una longitud de onda λ, un periodo T y una amplitud A. En el fenómeno de las olas, en lugar de la amplitud A, se acostumbra a utilizar la "altura de la ola", $h = 2A$.

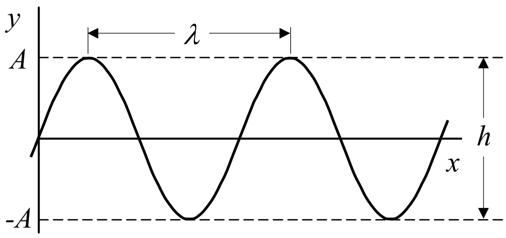


Fig. 2

Si no se tienen en cuenta las "olas de rizado", de longitudes de onda muy pequeñas (del orden de 15 mm), la velocidad de propagación de las olas depende de su longitud de onda, λ, de la gravedad, g y de la profundidad del mar, H, en la forma:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\lambda g}{2\pi}\right)\tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)} \qquad (1)$$

En la que tanh es la función *tangente hiperbólica*, que se define como

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \qquad \begin{cases} \tanh(x > \pi) \approx 1 \\ \tanh(x < \pi/10) \approx x \end{cases} \qquad (2)$$

En el fenómeno de propagación de las olas, se habla de aguas profundas o poco profundas (*someras*) cuando se compara la profundidad H con la longitud de onda, λ. Según esto, teniendo en cuenta (2), se pueden hacer aproximaciones en (1) para obtener la velocidad de propagación en cada uno de estos dos casos.

a) Obtenga la expresión de la velocidad de las olas en aguas profundas, en función del periodo T de las olas.

b) ¿Cuál es la velocidad de las olas en aguas someras? ¿Hasta que profundidad es válida esta aproximación?

A la 01:00 h del día 14 de febrero, la boya de Estaca de Bares (http://cma.puertocoruna.com/), registró olas de periodo $T = 8{,}0\ \text{s}$ y altura $h = 5{,}2\ \text{m}$.

c) Calcule la velocidad de las olas, en km/h. Suponga que esta boya se encuentra en aguas profundas.

d) Calcule la longitud de onda de las olas, λ. Compruebe que, efectivamente, la boya está en aguas profundas.

e) Escriba la ecuación de onda de las olas registradas en la boya de Estaca de Bares, $y(x, t)$ en función de los valores numéricos de T, λ y h.

La relación entre la velocidad del viento y la altura de las olas depende de muchos factores. La *Escala de Beaufort* es una relación empírica entre la velocidad del viento y un número, B, que se asigna al estado del mar dependiendo de la altura de las olas. La relación, expresada en unidades del SI, es la siguiente

$$v_{viento} = 0{,}836\, B^{3/2}$$

En la Tabla I están indicados los números de Beaufort correspondientes a la altura de las olas y la denominación del estado del mar.

Tabla I

B	**Estado del mar**	***h* (m)**
0	Calma	0
1	Rizada	0 a 0,1
2	Marejadilla	0,1 a 0,5
3 a 4	Marejada	0,5 a 1,25
5	Fuerte marejada	1,25 a 2,5
6	Mar gruesa	2,5 a 4
7 a 8	Muy gruesa	4 a 7,5
9 a 10	Arbolada	7,5 a 12,5
11	Montañosa	12,5 a 14
12	Enorme	> 14

f) Según la noticia de La Voz de Galicia, en la boya de Cabo Silleiro, se registraron olas de unos 9 m. ¿Cuál era aproximadamente la velocidad del viento (en km/h)?

En realidad las boyas no miden directamente la altura de las olas, sino la aceleración de la superficie del agua en su movimiento vertical.

El acelerómetro de la boya de Cabo Silleiro registró, en un momento del temporal, la siguiente aceleración (en unidades del SI):

$$a(t) = -1{,}23 \cos(0{,}524\, t)$$

g) ¿Cuál era la altura de las olas en ese momento?

h) Calcule la energía mecánica del agua por unidad de volumen.

Dato: densidad del agua del mar $\rho = 1{,}03 \times 10^3$ kg/m^3

Solución

a) Cuando $H > \lambda$, el argumento de la tanh es $2\pi H / \lambda > 2\pi > \pi$, de forma que

$$\tanh \frac{2\pi H}{\lambda} \approx 1$$

Por tanto, la velocidad de propagación en aguas profundas es

$$v = \sqrt{\left(\frac{\lambda g}{2\pi}\right)}$$

Teniendo en cuenta que $\lambda = vT$, se obtiene

$$\boxed{v = \frac{gT}{2\pi}} \qquad (3)$$

Nótese que la velocidad depende de la longitud de onda. Las aguas profundas se comportan como un *medio dispersivo*.

b) Para que sea aplicable la segunda aproximación de (2) debe cumplirse

$$\frac{2\pi H}{\lambda} < \frac{\pi}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H < \frac{\lambda}{20}}$$

Entonces

$$\tanh \frac{2\pi H}{\lambda} \approx \frac{2\pi H}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{gH}}$$

Esta velocidad no depende de λ. Las aguas someras se comportan como un medio *no dispersivo*.

c) Suponiendo aguas profundas, se cumple (3). Sustituyendo los datos se obtiene

$$\boxed{v = 12{,}5 \text{ m/s} = 45 \text{ km/h}}$$

d) Como $\lambda = vT$, resulta

$$\boxed{\lambda = 100 \text{ m}}$$

La suposición de "aguas profundas" es correcta pues en la boya de Estaca de Bares la profundidad es 1800 m, mucho mayor que λ.

e) La ecuación de una onda armónica es

$$y(x,t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

La altura de las olas es $h = 5{,}2$ m, por lo tanto la amplitud es $A = 2{,}6$ m. El periodo es $T = 8$ s y la longitud de onda es $\lambda = 100$ m, obtenida en el apartado anterior,

La ecuación de onda, expresada en unidades del SI, resulta

$$\boxed{y(x,t) = 2{,}6\cos 2\pi\left(\frac{x}{100} - \frac{t}{8}\right)}$$

f) Una altura de olas de 9 m, según la Tabla I, corresponde a mar arbolada con un número de Beaufort comprendido entre 9 y 10. Haciendo una interpolación lineal, puede tomarse $B = 9,3$. Con la expresión del enunciado se obtiene una velocidad del viento

$$v_{viento} = 23,7 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{viento} \approx 85 \text{ km/h}}$$

g) En un movimiento oscilatorio armónico de amplitud A y frecuencia angular $\omega = 2\pi / T$, la aceleración es

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t)$$

En nuestro caso

$$a(t) = -1,23 \cos(0,524\, t)$$

Por lo tanto, identificando términos, $\omega^2 A = 1,23 \text{ m/s}^2$ y $\omega = 0,524 \text{ s}^{-1}$

$$A = \frac{1,23}{0,524^2} = 4,5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 9,0 \text{ m}}$$

h) Cuando un volumen V de agua, de masa m, realiza un movimiento armónico, su energía mecánica es constante e igual a la energía cinética máxima. Su valor es

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho V \omega^2 A^2$$

Donde ρ es la densidad del agua.

La energía por unidad de volumen (densidad de energía, ρ_E) resulta

$$\boxed{\rho_E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2}$$

Con los datos del apartado anterior y la densidad del agua de mar, se obtiene

$$\boxed{\rho_E = 2,9 \times 10^3 \text{ J/m}^3}$$