P1.- La delicada vida gravitatoria del cometa 67P/Churiumov-Guerasimenko .

El cometa 67P, descubierto en 1969 por los astrónomos Klim Churiumov y Svetlana Guerasimenko, se ha convertido recientemente en una “estrella” en los medios de comunicación. El motivo ha sido la visita que la Agencia Espacial Europea ha realizado con éxito a la superficie de este cometa. La sonda Rosetta, lanzada el 2 de marzo de 2004 desde la base de Kourou en la Guayana francesa, tras un largo viaje de diez años consiguió entrar en órbita en torno al cometa, y dejó caer el módulo Philae sobre su superficie. Sin embargo el “aterrizaje” (¿cometizaje?) tuvo dificultades: el módulo no se fijó a la superficie como estaba previsto, y rebotó varias veces hasta quedar en reposo en una zona recóndita y sombría donde los paneles solares apenas podían recargar sus baterías. No obstante, la misión ha proporcionado información científica valiosísima. Tanto es así que la prestigiosa revista *Science* ha calificado esta misión como el descubrimiento científico más importante del año 2014.

Desde la sonda Rosetta se pudo comprobar que 67P tiene una forma irregular, como se muestra en la fotografía de la figura 1, con dos lóbulos desiguales que, en primera aproximación, podemos imaginar como dos cuerpos esféricos homogéneos (señalados con línea de trazos en la figura 1), que se mantienen en contacto exclusivamente por la atracción gravitatoria mutua. El cometa está básicamente formado por hielo y polvo suelto y esponjoso, con escasa cohesión interna. En la figura 2 se esquematiza este modelo de dos cuerpos esféricos apoyados uno en otro, con indicaciones de sus centros, radios, etc. El punto A indica aproximadamente la situación del módulo Philae sobre la superficie (cráter a la derecha de la figura 1), alineado con los centros de las dos esferas.

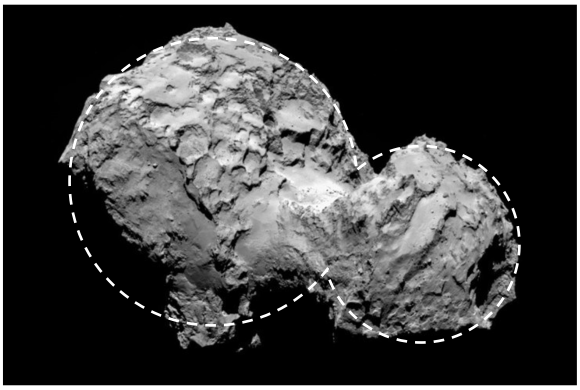

Fig. 1

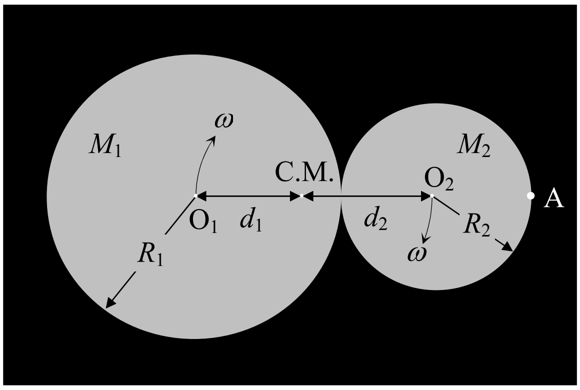

Fig. 2

Además, el cometa gira con velocidad angular ω en torno a un eje perpendicular al plano de la figura 2 y que pasa por el centro de masas del sistema (C.M.). Medidos desde la sonda Rosetta, el periodo de rotación y los radios aproximados de las esferas son $T = 12{,}4$ h , $R_1 = 1{,}5$ km y $R_2 = 1{,}2$ km .

a) Sabiendo que la masa total de 67P, medida desde el Rosetta, es $M = 1{,}0\times10^{13}$ kg , determine analíticamente y calcule la densidad ρ del cometa y las masas M_1 y M_2 de cada uno de sus lóbulos esféricos.

b) Determine y calcule las distancias d_1 y d_2 entre el centro de masas y los centros O_1 y O_2 de las dos esferas[1].

c) Calcule la fuerza de atracción gravitatoria entre los dos lóbulos, F_G .

d) Teniendo en cuenta la rotación del sistema, determine y calcule la fuerza de apoyo normal de cada lóbulo sobre el otro, N.

[1] Quizá no conozca con detalle el concepto de “centro de masas”, pues sobrepasa los límites del programa mínimo de Física del Bachillerato español. Para la resolución de este problema es suficiente saber que debe cumplirse la igualdad $M_1 d_1 = M_2 d_2$.

e) Determine y calcule el período de rotación crítico, T_c, por debajo del cual el cometa se disgregaría, al separarse las dos esferas.

f) Determine y calcule la aceleración de la gravedad en A, $g_{0,\mathrm{A}}$.

g) Teniendo en cuenta la rotación del cometa, ¿cuál es la gravedad aparente[2] en A, g_A?

h) El Philae *pesaba*[3] en la Tierra $w_T = 110\ \mathrm{kg}$. ¿Cuál será su *peso* (en gramos), w_A, una vez posado en A?

i) Imagine un hipotético astronauta que, con su traje espacial y equipo, es capaz de saltar en vertical (sin carrerilla e impulsándose hacia arriba con las piernas) una altura $h = 0{,}2\ \mathrm{m}$ en la Tierra. Sin tener en cuenta la rotación del cometa, ¿hasta qué altura saltaría desde el punto A de la superficie del cometa? Discuta su resultado.

Constante de gravitación universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.

[2] Fuerza de apoyo sobre la superficie por unidad de masa.

[3] Este "peso" debe entenderse en el sentido coloquial que se usa en la vida cotidiana, por ejemplo cuando alguien dice que pesa 70 kilos.

P1. Solución

a) La masa total del cometa, supuesto de densidad constante ρ, es

$$M = M_1 + M_2 = \rho \frac{4}{3}\pi\left(R_1^3 + R_2^3\right) \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \frac{3M}{4\pi\left(R_1^3 + R_2^3\right)}} \; ; \quad \boxed{\rho = 4{,}7\times10^{2}\ \text{kg/m}^{3}}$$

Conocida la densidad, es inmediato obtener las masas de los dos lóbulos. Se obtiene

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= 6{,}6\times10^{12}\,\text{kg} \\ M_2 &= 3{,}4\times10^{12}\,\text{kg} \end{aligned}}$$

b) Para determinar las distancias d_1 y d_2 de los centros de cada lóbulo al centro de masas del sistema utilizamos la expresión que nos facilita la nota 1, a pié de página del enunciado

$$M_1 d_1 = M_2 d_2 \qquad (1)$$

Por otra parte, observando la figura 2

$$d_1 + d_2 = R_1 + R_2 \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$\boxed{\begin{aligned} d_1 &= \frac{M_2}{M}(R_1 + R_2) \\ d_2 &= \frac{M_1}{M}(R_1 + R_2) \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} d_1 &= 0{,}9\ \text{km} \\ d_2 &= 1{,}8\ \text{km} \end{aligned}}$$

c) La distancia entre los centros de las esferas es $d = R_1 + R_2$, por lo que el módulo de la fuerza de atracción gravitatoria entre los dos lóbulos es

$$F_G = G\frac{M_1 M_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Operando se obtiene

$$\boxed{F_G = 2{,}1\times10^{8}\,\text{N}}$$

d) Si consideramos el movimiento de, por ejemplo, el lóbulo 2, su centro O_2 está describiendo una trayectoria circular de radio d_2 con velocidad angular $\omega = 2\pi/T$ en torno al C.M., y por tanto se mueve con una aceleración centrípeta de módulo constante $\omega^2 d_2$. Sobre este lóbulo actúan en dirección central la fuerza F_G de atracción del lóbulo 1 y, en sentido opuesto, la fuerza de apoyo sobre este mismo lóbulo, N (véase la figura 3). En este caso, la segunda ley de Newton se escribe

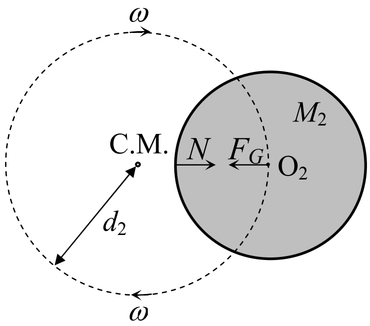

Fig. 3

$$F_G - N = M_2\,\omega^2 d_2$$

Por tanto, la fuerza de apoyo entre los lóbulos es[4]

$$\boxed{N = F_G - M_2\,\omega^2 d_2}$$

[4] Aunque las *fuerzas de inercia* están proscritas en la Enseñanza media actual, esta ecuación puede interpretarse de una forma más sencilla y directa como que la normal es igual a la fuerza de atracción gravitatoria menos la fuerza centrífuga (condición de equilibrio planteada por un observador no inercial que gira con el cometa).

Con los datos del problema y los resultados de los apartados anteriores se obtiene

$$\boxed{N = 8{,}5 \times 10^7 \text{ N}}$$

Nótese que se obtendría el mismo resultado si se estudiase el movimiento de la esfera 1, puesto que se cumple $M_1 d_1 = M_2 d_2$.

e) Supuesto que no existe ninguna fuerza de adherencia entre las dos esferas, se separarán cuando su trayectoria circular requiera una fuerza centrípeta superior a la de atracción gravitatoria, es decir cuando

$$M_2\, \omega^2 d_2 > F_G$$

En otras palabras, la velocidad angular crítica correspondería a una trayectoria circular como la considerada en el apartado anterior, pero con $N = 0$.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{F_G}{M_2\, d_2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = 1{,}84 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

El periodo de revolución crítico sería

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_c = 2\pi \sqrt{\frac{M_2\, d_2}{F_G}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_c = 9{,}5 \text{ h}}$$

f) La gravedad en el punto A, $g_{0,A}$, es la fuerza gravitatoria por unidad de masa en ese punto, debida a la suma de las atracciones gravitatorias de los dos lóbulos que constituyen el cometa.

$$\boxed{g_{0,A} = G\left(\frac{M_1}{(R_1 + 2R_2)^2} + \frac{M_2}{R_2{}^2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{0,A} = 1{,}9 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2}$$

g) La gravedad aparente en A es la fuerza de apoyo sobre la superficie por unidad de masa. El punto A describe una trayectoria circular de radio $d_2 + R_2$ en torno al C.M., de forma que, con un razonamiento análogo al del apartado (4), se tiene

$$\boxed{g_A = g_{0,A} - \omega^2 (d_2 + R_2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_A = 1{,}3 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2}$$

h) Cuando el enunciado expresa en kg el "peso" del módulo Philae en la Tierra, $w_T = 110$ kg, realmente lo está expresando en "kilogramos fuerza" o "kilopondios", que es lo que en la vida cotidiana llamamos simplemente "kilos". Debemos entender, en un lenguaje estricto, que la masa del Philae es $m = 110$ kg. Naturalmente, esta masa es la misma en P67 que en la Tierra.

El peso, w_A, del módulo cuando esté situado en el punto A del cometa es

$$w_A = m\, g_A \quad \Rightarrow \quad w_A = 1{,}4 \times 10^{-2} \text{ N}$$

Traduciendo de nuevo al lenguaje coloquial, un kilogramo fuerza equivale a 9,8 N, luego Philae en el punto A del cometa "pesa" tan solo

$$\boxed{w_A = 1{,}4 \text{ g}}$$

i) Para que el astronauta, de masa m, realice un salto "vertical" de altura máxima $h = 0{,}2$ m en la superficie de la Tierra, necesita una velocidad inicial, v_0, que debe cumplir

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m\, g\, h \qquad (3)$$

Para realizar el salto, debe flexionar las piernas e impulsarse hacia arriba. El trabajo que realizan sus músculos durante este proceso aporta la energía necesaria, dada en (3). La velocidad inicial resulta

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,h} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 2{,}0 \text{ m/s}$$

Si el hipotético astronauta realizase el salto vertical en el punto A del cometa 67P, sus músculos realizarían el mismo trabajo que en la Tierra, y la velocidad inicial v_0 sería por tanto la misma que en la Tierra. Pero, dada la "levedad" del cometa, es evidente que va a alcanzar una altura *H* mucho mayor que *h*, probablemente no despreciable frente a las dimensiones del cometa. Esta altura máxima *H* puede obtenerse planteando la conservación de la energía mecánica, con energía cinética nula en el punto más alto, pero empleando la forma general de la energía potencial en el campo gravitatorio de las dos esferas, en vez de la típica forma *mgh* que corresponde al campo aproximadamente uniforme en las proximidades de la superficie.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1 + 2R_2} - G\frac{M_2 m}{R_2} = -G\frac{M_1 m}{R_1 + 2R_2 + H} - G\frac{M_2 m}{R_2 + H} \qquad (4)$$

De esta ecuación puede despejarse *H*, aunque es bastante engorroso, pero al realizar cálculos numéricos se llega a resultados absurdos. El problema matemático está en que el segundo miembro de (4) es forzosamente menor o igual que cero, mientras que el primero, con los valores numéricos del problema, es positivo, de forma que la igualdad es imposible.

Desde el punto de vista físico, una energía mecánica inicial positiva indica que la velocidad inicial del astronauta, tras el salto, es superior a la *velocidad de escape*, con lo cual se alejaría indefinidamente del cometa y pasaría a ser un curioso asteroide orbitando en torno al Sol.

Para comprobarlo, puede calcularse fácilmente la velocidad de escape, planteando que la energía mecánica inicial sea nula, de forma que pueda llegar hasta el infinito, donde la energía potencial es nula, con energía cinética también nula.

$$\frac{1}{2} m v_{\text{esc}}^2 - G\frac{M_1 m}{R_1 + 2R_2} - G\frac{M_2 m}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$v_{\text{esc}} = \left[2G\left(\frac{M_1}{R_1 + 2R_2} + \frac{M_2}{R_2} \right) \right]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{esc}} = 0{,}78 \ \text{m/s}$$

Se comprueba que, efectivamente, $v_0 > v_{\text{esc}}$, de forma que el astronauta saltarín iniciaría un viaje… "a las chimbambas".

P1.- Tabla de respuestas

<table>
<tr><th>Apartado</th><th>Resultados analíticos</th><th>Resultados numéricos</th><th>Puntos</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\rho = \dfrac{3M}{4\pi\left(R_1^3 + R_2^3\right)}$</td><td>$\rho = 4{,}7\times10^{2}\ \mathrm{kg/m^3}$
$M_1 = 6{,}6\times10^{12}\,\mathrm{kg}$
$M_2 = 3{,}4\times10^{12}\,\mathrm{kg}$</td><td>1
(0,25x4)</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$d_1 = \dfrac{M_2}{M}(R_1 + R_2)$
$d_2 = \dfrac{M_1}{M}(R_1 + R_2)$</td><td>$d_1 = 0{,}9\ \mathrm{km}$
$d_2 = 1{,}8\ \mathrm{km}$</td><td>1
(0,25x4)</td></tr>
<tr><td>c)</td><td></td><td>$F_G = 2{,}1\times10^{8}\,\mathrm{N}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>$N = F_G - M_2\,\omega^2 d_2$</td><td>$N = 8{,}5\times10^{7}\ \mathrm{N}$</td><td>0,5+0,25</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>$T_c = 2\pi\sqrt{\dfrac{M_2 d_2}{F_G}}$</td><td>$T_c = 9{,}5\ \mathrm{h}$</td><td>1+0,25</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>$g_{0,A} = G\left(\dfrac{M_1}{(R_1 + 2R_2)^2} + \dfrac{M_2}{{R_2}^2}\right)$</td><td>$g_{0,A} = 1{,}9\times10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}$</td><td>1+0,25</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>$g_A = g_{0,A} - \omega^2(d_2 + R_2)$</td><td>$g_A = 1{,}3\times10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}$</td><td>1,5+0,25</td></tr>
<tr><td>h)</td><td></td><td>$w_A = 1{,}4\ \mathrm{g}$</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>i)</td><td colspan="2">La velocidad inicial del salto vertical de altura h, en la Tierra:
$v_0 = \sqrt{2\,g\,h} \quad\Rightarrow\quad v_0 = 2{,}0\ \mathrm{m/s}$
Velocidad de escape en el cometa 67P:
$v_{\mathrm{esc}} = \left[2G\left(\dfrac{M_1}{R_1 + 2R_2} + \dfrac{M_2}{R_2}\right)\right]^{1/2} \quad\Rightarrow\quad v_{\mathrm{esc}} = 0{,}78\ \mathrm{m/s}$
Como $v_0 > v_{\mathrm{esc}}$, el astronauta se alejaría indefinidamente del cometa.</td><td>2</td></tr>
</table>