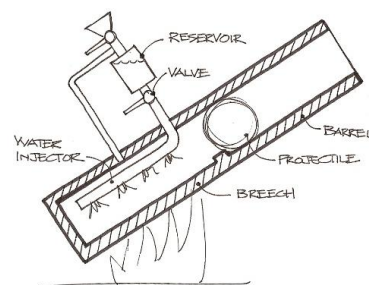
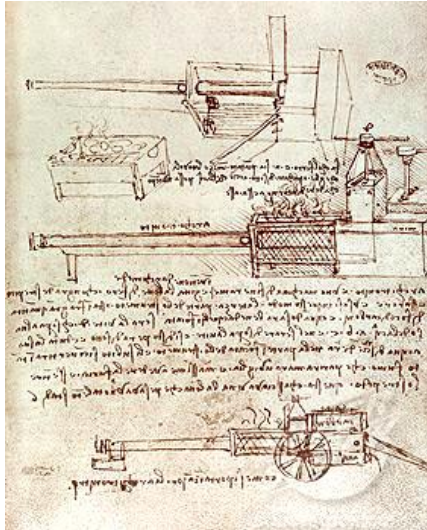


P1. El Architronito de Arquímedes

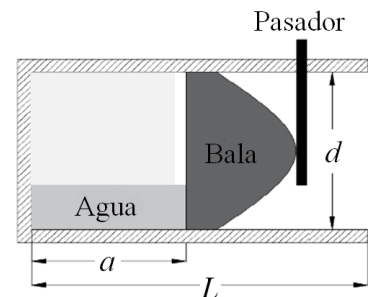
Arquímedes de Siracusa (Sicilia, actual Italia) fue un genio griego y uno de los mayores científicos de la Edad Antigua. Sus trabajos en matemáticas, física e ingeniería han tenido una gran influencia en la ciencia moderna. Algunos de sus inventos aún se usan, como, por ejemplo, el tornillo de Arquímedes o la garra de Arquímedes.

En este problema vamos a analizar uno de sus inventos: el cañón de Arquímedes o Architronito, un cañón de vapor de agua que se encuentra descrito en documentos de Leonardo da Vinci de finales del siglo XV. Leonardo describió el Architronito como “una máquina de cobre fino, una invención de Arquímedes, que



lanza bolas de hierro con gran ruido y violencia”. El cañón funciona mediante un fuego que calienta la cámara del cañón. El agua se inserta en la cámara a través de una válvula e inmediatamente se convierte en vapor, proporcionando la presión necesaria para propulsar el proyectil.

En la figura se muestra una vista lateral de un modelo que, si bien no es exactamente igual al diseño original, reproduce en esencia los principios físicos de funcionamiento del Architronito. El dispositivo consiste en un tubo cilíndrico de hierro de diámetro interno $d = 20$ cm, longitud $L = 1$ m y masa $m_t = 20$ kg cerrado por su extremo izquierdo, y que supondremos anclado al suelo para evitar retrocesos en el proceso de lanzamiento. Se coloca dentro del tubo una bala de hierro de masa $m_b = 2$ kg, que encaja perfectamente y sin rozamiento con las paredes del tubo y que está inicialmente a distancia $a = 50$ cm de la base del tubo (la tapadera del extremo izquierdo), creando una cámara hermética en la que previamente se han introducido 100 ml de agua. El resto de la cámara contiene aire (en lo sucesivo, “aire” se referirá sólo a este aire seco que no incluye el vapor) y una cantidad inicialmente despreciable de vapor de agua. La temperatura inicial del cañón (tubo, bala, agua y aire) es $T_1 = 20^\circ\text{C}$ y la presión inicial en la cámara es la atmosférica, $P_1 = 1$ atm. Se conecta al cañón una fuente de calor que le comunica una energía por unidad de tiempo $k = 5 \cdot 10^3$ J/s. Suponemos que todo el sistema se calienta de manera homogénea. Consideraremos en todo el problema que tanto el aire como el vapor de agua se comportan como gases ideales.



- a) Calcule el número de moles de agua y el número de moles de aire que hay inicialmente dentro del cañón. Calcule la densidad del aire.

Como la cámara del cañón es un recipiente cerrado, el agua se encuentra en equilibrio dinámico con su vapor, de manera que hay tantas moléculas de líquido que se evaporan como moléculas de gas que se condensan. Este equilibrio ocurre a una presión llamada “presión de vapor”, que es la presión que ejercen las moléculas de la fase gaseosa sobre la fase líquida a una temperatura dada. Conforme se calienta el agua más moléculas logran escapar del líquido, por lo que aumenta la concentración de vapor y, por tanto, aumenta la

presión de vapor. Un líquido empieza a hervir cuando la presión de vapor iguala la presión externa. Pero dentro del cañón el agua no puede hervir, porque la presión de vapor siempre es menor que la presión total (la del vapor más la del aire), y sólo hay evaporación. Sabemos que la presión de vapor del agua se relaciona con la temperatura por medio de la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$P = 101325 \cdot e^{\frac{L}{R} \left(\frac{1}{373.15} - \frac{1}{T} \right)},$$

donde P está expresada en Pa y T en K, la constante L es el calor latente de vaporización del agua y R es la constante de los gases ideales. (Se comprueba que a 100 °C la presión de vapor es 1 atm.)

Calentamos el sistema hasta $T_2 = 150$ °C .

- b) Calcule la presión de vapor, la presión del aire y la presión total dentro de la cámara a 150 °C. ¿Cuántos moles de agua quedan sin evaporar?

Seguimos calentando hasta una temperatura T_3 justo a la cual toda el agua líquida se ha evaporado y ya sólo hay vapor en la cámara del cañón.

- c) Compruebe que T_3 está entre 190 °C y 200 °C.

Calentamos aún más, ya con toda el agua en fase vapor, hasta alcanzar una temperatura $T_4 = 300$ °C .

- d) Calcule el calor total empleado para aumentar la temperatura de T_1 a T_4 . Escriba una lista ordenada con todos los procesos involucrados empezando por el que más calor ha necesitado y terminando por el que menos. ¿Cuánto tiempo ha estado encendida la fuente de calor? (Utilice un valor razonable para T_3 . Suponga que, aunque la evaporación es gradual, toda el agua permanece líquida hasta T_3 . Suponga también que el aire y el vapor sufren procesos a volumen constante.)

Al alcanzar la temperatura $T_4 = 300$ °C se quita el pasador del cañón y la bala comienza a moverse hacia la derecha. Como el proceso ocurre en poco tiempo, se puede considerar que el vapor de agua sufre un proceso adiabático (es decir, sin transferencia de calor entre el sistema y el exterior). Un gas ideal que sufre un proceso adiabático cumple $PV^\gamma = \text{cte}$, donde γ es el coeficiente adiabático del gas.

- e) Obtenga la expresión de la presión del vapor de agua cuando la base de la bala está a distancia x de la tapadera del cañón. Compruebe que en todo el trayecto de la bala por el interior del cañón es razonable suponer que la acción de la presión atmosférica es despreciable.
- f) Escriba la ecuación de movimiento de la bala en función de x . (Desprecie la acción de la presión del aire de la cámara y de la presión atmosférica sobre la bala.)
- g) Obtenga la expresión para la velocidad de la bala a lo largo del cañón. Ayuda: integre la ecuación diferencial anterior reescribiendo la aceleración como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

$$\text{Tenga en cuenta que } \int x^{-\gamma} dx = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

- h) Calcule la velocidad que tiene la bala cuando sale por la boca del cañón.

Datos: densidad del agua $\rho_a = 1000$ kg/m³ , masa molecular del agua $M_a = 0.018$ kg/mol , masa molecular del aire $M_{\text{aire}} = 0.029$ kg/mol , presión atmosférica 1 atm = 101325 Pa , temperatura del cero absoluto $T_0 = -273.15$ °C = 0 K , constante de los gases ideales $R = 8.31$ J/(mol · K) , calor latente de vaporización del agua $L = 40 \cdot 10^3$ J/mol = $2.22 \cdot 10^6$ J/kg , calor específico del agua $c_a = 4180$ J/(kg · K) , calor específico del hierro $c_{\text{Fe}} = 450$ J/(kg · K) , calor específico a volumen constante del vapor $c_v = 1410$ J/(kg · K) , calor específico a volumen constante del aire $c_{\text{aire}} = 720$ J/(kg · K) , coeficiente adiabático del vapor $\gamma = 1.324$.

Solución

- a) Como hay 100 ml de agua su volumen será $V_a = 0.0001 \text{ m}^3$ y su masa será $m_a = 0.1 \text{ kg}$. El número de moles es la masa dividida por la masa molecular:

$$n_a = m_a / M_a = 0.1 / 0.018 = 5.56 \text{ moles}.$$

El volumen total de la cámara es $V_{\text{total}} = \pi(d/2)^2 a = 0.0157 \text{ m}^3$. El volumen que ocupa el aire es

$$V_{\text{aire}} = V_{\text{total}} - V_{\text{agua}} = 0.0157 - 0.0001 = 0.0156 \text{ m}^3,$$

que es prácticamente el volumen total. Para calcular el número de moles de aire utilizamos la ecuación de los gases ideales:

$$n_{\text{aire}} = \frac{P_1 V_{\text{aire}}}{RT_1} = \frac{101325 \cdot 0.0156}{8.31 \cdot (273.15 + 20)} = 0.65 \text{ moles}.$$

La densidad del aire es

$$\rho_{\text{aire}} = \frac{m_{\text{aire}}}{V_{\text{aire}}} = \frac{n_{\text{aire}} M_{\text{aire}}}{V_{\text{aire}}} = \frac{0.65 \cdot 0.029}{0.0156} = 1.2 \text{ kg/m}^3.$$

- b) La presión de vapor a $T_2 = 150^\circ\text{C}$ se calcula mediante la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$P_{v2} = 101325 \cdot e^{\frac{L}{R} \left(\frac{1}{373.15} - \frac{1}{T_2} \right)} = 101325 \cdot e^{\frac{40 \cdot 10^3}{8.31} \left(\frac{1}{373.15} - \frac{1}{423.15} \right)} = 4.59 \text{ atm}.$$

Aunque ya se ha evaporado algo de agua, ésta ocupa un volumen despreciable y podemos considerar que el volumen que ocupa el aire y el vapor es prácticamente el mismo que el inicial. La presión del aire es

$$P_{\text{aire2}} = \frac{n_{\text{aire}} RT_2}{V_{\text{aire}}} = \frac{0.65 \cdot 8.31 \cdot (273.15 + 150)}{0.0156} = 1.44 \text{ atm}.$$

La presión total dentro de la cámara será la suma de la presión del aire y la presión de vapor:

$$P_{\text{total}} = P_{\text{aire2}} + P_{v2} = 1.44 + 4.59 = 6.03 \text{ atm}.$$

El número de moles de vapor se calcula con la ecuación de los gases ideales:

$$n_{v2} = \frac{P_{v2} V_{\text{aire}}}{RT_2} = \frac{(101325 \cdot 4.59) \cdot 0.0156}{8.31 \cdot 423.15} = 2.06 \text{ moles}.$$

Por tanto, quedan $5.56 - 2.06 = 3.5 \text{ moles}$ de agua sin evaporar.

(Vemos que incluso a 150°C todavía quedan casi dos terceras partes de agua líquida.)

- c) Cuando se ha evaporado toda el agua, el número de moles de vapor es igual al número inicial de moles de agua calculado en el apartado a), es decir, $n_v = n_a = 5.56$. Y el vapor ocupará todo el volumen de la cámara, V_{total} . Según la ecuación de los gases ideales, la presión del vapor y la temperatura cumplirán

$$P_{v3} = \frac{n_v RT_3}{V_{\text{total}}} = \frac{5.56 \cdot 8.31}{0.0157} T_3 = 2943 T_3 \text{ Pa}.$$

Y también cumplirán la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$P_{v3} = 101325 \cdot e^{\frac{40 \cdot 10^3}{8.31} \left(\frac{1}{373.15} - \frac{1}{T_3} \right)} = 4.05 \cdot 10^{10} \cdot e^{-\frac{4813.5}{T_3}} \text{ Pa}.$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver por tanteo, probando diferentes temperaturas y comprobando si nos pasamos o nos quedamos cortos. En el intervalo que sugiere el enunciado:

Si $T_3 = 190^\circ\text{C}$, la primera ecuación da una presión de 13.5 atm y la segunda ecuación da 12.2 atm, menor que la anterior.

Si $T_3 = 200^\circ\text{C}$, la primera ecuación da una presión de 13.7 atm y la segunda ecuación da 15.3 atm, mayor que la anterior.

Por tanto, la temperatura T_3 está dentro de ese intervalo. Y un valor razonable es el valor medio: $T_3 = 195^\circ\text{C}$.

(También se pueden representar las dos curvas de presión, una lineal y la otra exponencial, y obtener de forma gráfica el punto donde se cortan. La resolución numérica del sistema de dos ecuaciones da como resultado exacto: $T_3 = 194.5^\circ\text{C}$ y $P_{v3} = 13.6\text{ atm}$.)

d) Los procesos involucrados son los siguientes:

Calentamiento de una masa de hierro $m_t + m_b = 22\text{ kg}$ desde T_1 a T_4 :

$$Q_{Fe} = (m_t + m_b) c_{Fe} (T_4 - T_1) = 22 \cdot 450 \cdot (300 - 20) = 2772\text{ kJ}.$$

Calentamiento de una masa de aire $m_{aire} = 0.65 \cdot 0.029 = 0.0189\text{ kg}$ desde T_1 a T_4 :

$$Q_{aire} = m_{aire} c_{aire} (T_4 - T_1) = 0.0189 \cdot 720 \cdot (300 - 20) = 3.8\text{ kJ}.$$

Calentamiento de una masa de agua $m_a = 0.1\text{ kg}$ desde T_1 a T_3 (aunque la evaporación es gradual, como aproximación suponemos que toda el agua permanece líquida hasta T_3):

$$Q_{agua} = m_{agua} c_{agua} (T_3 - T_1) = 0.1 \cdot 4180 \cdot (195 - 20) = 73.2\text{ kJ}.$$

Calentamiento de una masa de vapor $m_v = 0.1\text{ kg}$ desde T_3 a T_4 :

$$Q_v = m_v c_v (T_4 - T_3) = 0.1 \cdot 1410 \cdot (300 - 195) = 14.8\text{ kJ}.$$

Vaporización de una masa de agua $m_a = 0.1\text{ kg}$:

$$Q_L = m_a L = 0.1 \cdot 2.22 \cdot 10^6 = 222\text{ kJ}.$$

El calor total necesario para llevar el sistema hasta T_4 es

$$Q = Q_{Fe} + Q_{aire} + Q_{agua} + Q_v + Q_L = 3086\text{ kJ}.$$

La lista ordenada de los procesos según el gasto de calor es $Q_{Fe} > Q_L > Q_{agua} > Q_v > Q_{aire}$.

La fuente de calor ha estado encendida un tiempo

$$t = \frac{Q}{k} = \frac{3086}{5} = 10.3\text{ min}.$$

(Se admite que los estudiantes utilicen para T_3 el valor medio del intervalo del apartado anterior, es decir, 195°C).

e) Aplicando de nuevo la ecuación de los gases ideales para $T_4 = 300^\circ\text{C}$ y V_{total} conocemos la presión del vapor justo antes de quitar el pasador:

$$P_{v4} = \frac{5.56 \cdot 8.31 \cdot 573.15}{0.0157} = 16.6\text{ atm}.$$

Esta presión es mucho mayor que la atmosférica, por eso, cuando se suelte el pasador, la bala del cañón comenzará a acelerarse hacia la derecha.

Según el proceso de expansión adiabática, la presión cuando la bala está a distancia x será

$$P_v(x) = \left(\frac{V_{total}}{V(x)} \right)^\gamma P_{v4} = \left(\frac{a}{x} \right)^\gamma P_{v4} = 16.6 \cdot \left(\frac{0.5}{x} \right)^{1.324} = \frac{6.63}{x^{1.324}} \text{ atm} = \frac{6.7 \cdot 10^5}{x^{1.324}} \text{ Pa}.$$

Los valores de la presión del vapor de agua dentro del cañón en los extremos del recorrido de la bala ($x = a = 0.5 \text{ m}$ y $x = L = 1 \text{ m}$) son

$$P_v(a) = P_{v4} = 16.6 \text{ atm},$$

$$P_v(L) = 6.6 \text{ atm}.$$

Por tanto, en el recorrido de la bala, los valores de la presión del vapor son mucho mayores que la presión atmosférica.

Además, la presión atmosférica queda en buena medida contrarrestada por la presión del aire en el interior de la cámara, ya que dicha presión es $P_{aire4} = 0.65 \cdot 8.31 \cdot 573.15 / 0.0157 = 1.9 \text{ atm}$ justo antes del disparo, y en el extremo de salida del cañón (utilizando el mismo proceso de expansión adiabática que para el vapor) la presión del aire es 0.8 atm .

Por lo anterior, en los siguientes apartados es razonable despreciar la presión atmosférica y la presión del aire, y considerar sólo la acción de la presión de vapor $P_v(x)$ sobre la bala.

- f)** La presión del vapor ejerce sobre la bala una fuerza

$$F(x) = P_v(x) \cdot \pi(d/2)^2 = \frac{2.1 \cdot 10^4}{x^{1.324}} \text{ N}.$$

A lo largo del eje horizontal la 2ª ley de Newton es

$$F(x) = m_b \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{2.1 \cdot 10^4}{x^{1.324}} = 2 \frac{d^2x}{dt^2}.$$

- g)** La presión del vapor ejerce sobre la bala una fuerza

$$\frac{1.05 \cdot 10^4}{x^{1.324}} = \frac{d^2x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx} \rightarrow 1.05 \cdot 10^4 \frac{dx}{x^{1.324}} = v dv.$$

Como la bala parte del reposo: $v(a) = 0$. Resolviendo las integrales se tiene

$$1.05 \cdot 10^4 \cdot \int_a^x \frac{dx}{x^{1.324}} = \int_0^v v dv \rightarrow \frac{1.05 \cdot 10^4}{-0.324} \cdot \left[\frac{1}{x^{0.324}} \right]_{a=0.5}^x = \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^x.$$

Y, finalmente, la velocidad de la bala a lo largo del cañón es

$$v(x) = 100 \cdot \sqrt{8.1 - \frac{6.5}{x^{0.324}}} \text{ m/s}.$$

- h)** La velocidad de la bala cuando sale por la boca del cañón es

$$v(L) = 126 \text{ m/s}.$$