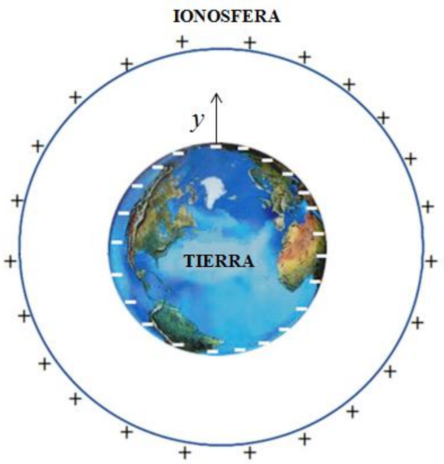
P1. Campo eléctrico terrestre



Además del conocido campo magnético, la Tierra también está rodeada de un campo eléctrico. El origen de dicho campo es complejo y, entre otros factores, pueden citarse la acumulación de enormes cargas estáticas generadas por la fricción de unas capas de aire con otras, la evaporación, reacciones químicas en la atmósfera, la expansión del aire, la condensación del vapor de agua, variaciones de la temperatura y la humedad del aire, los rayos cósmicos, etc.

Como resultado de los mecanismos citados, el aire en la ionosfera[1] está cargado positivamente, mientras que la superficie terrestre está cargada negativamente. Esta distribución de cargas produce un campo eléctrico variable con la altura, cuyo módulo en la superficie de la Tierra es aproximadamente $E_0 = 100\ \mathrm{V/m}$.

a) Obtenga la carga total, con su signo, acumulada en la superficie terrestre, suponiendo que ésta es conductora. Explique con la ayuda de un dibujo y flechitas cómo es el campo eléctrico cerca de la superficie terrestre.

El campo eléctrico terrestre varía con la altura, pero lo hace lentamente, de manera que el campo puede considerarse uniforme localmente en regiones que cubren varios metros de extensión. En lo que sigue, consideraremos el campo terrestre en la dirección vertical (eje Y).

Se dispone de un medidor de campo eléctrico que consiste en una corteza esférica conductora de magnesio, eléctricamente neutra, de radio exterior $a = 20\ \mathrm{cm}$ y paredes de espesor $e = 1\ \mathrm{cm}$ en cuyo interior se ha hecho el vacío. Cuando la corteza esférica se sitúa en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$, sus cargas se redistribuyen y aparece en cada punto de la superficie exterior una densidad de carga $\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre el campo y la dirección radial desde el centro de la corteza esférica al punto en cuestión.

b) Demuestre que el campo terrestre, $\vec{E}$, induce en cada hemisferio del medidor una carga total de módulo $Q = 3\pi a^2\varepsilon_0 E$. (Nota: $\int \sin(k\theta)d\theta = -\cos(k\theta)/k + cte$.)

c) Haga un dibujo con la distribución de cargas aproximada a lo largo de la superficie del medidor, mostrando los dos hemisferios e indicando los signos de las cargas.

d) Calcule el peso del medidor de campo, situado en la superficie terrestre, que medirá un dinamómetro (que mide fuerzas), tanto si se considera el efecto del aire atmosférico como si no. Indique, razonadamente, si también afecta a la medida del peso la existencia del campo eléctrico.

e) Calcule el valor de la carga que hay que depositar en el medidor para que permanezca flotando en el aire cerca de la superficie terrestre.

La variación del campo eléctrico terrestre con la altura depende de múltiples factores. Aquí vamos a suponer un modelo muy simple en el que el campo disminuye exponencialmente con la altura según la expresión

$$E(y) = E_0 e^{-\alpha y},$$

donde y es la altura sobre la superficie terrestre y α es una constante.

[1] La ionosfera es una capa de la atmósfera que se extiende entre los 80 y los 400 km de altitud.

f) Se lanza el medidor de campo en un globo aerostático hasta una altura de 4 km, y se observa que la carga inducida en los hemisferios es la quinta parte que la que había en la superficie terrestre. Calcule el valor de α.

g) Obtenga la expresión del potencial eléctrico en función de la altura, $V(y)$, eligiendo el origen de potencial en la superficie de la Tierra. Calcule la diferencia de potencial entre la superficie de la Tierra y el globo aerostático. (Nota: $\int e^{kx}dx = e^{kx}/k + cte.$)

h) Una partícula de polvo de masa 10^{-10} kg que está en reposo sobre la superficie terrestre, se ioniza y comienza a ascender. Calcule el valor absoluto mínimo de la carga, y su signo, que debe adquirir la partícula al ionizarse para poder llegar hasta el globo aerostático.

Datos en el S.I.: gravedad en la superficie terrestre $g = 9.81$, densidad del magnesio $\rho_{Mg} = 1740$, densidad del aire cerca de la superficie terrestre $\rho_{aire} = 1.23$, radio de la Tierra $R_t = 6370 \cdot 10^3$, permitividad eléctrica del vacío $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$.

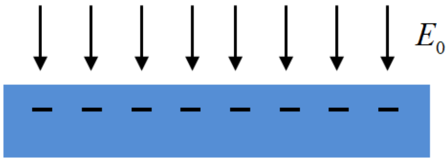
P1. SOLUCIÓN

a) Aplicando el teorema de Gauss obtenemos la carga en la superficie terrestre:

$$\Phi = -E_0 S = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad Q_T = -\varepsilon_0 E_0 4\pi R_T^2 .$$

Su valor numérico es $Q_T = -4.51 \cdot 10^5$ C. Es una carga de signo negativo.

El campo eléctrico cerca de la superficie terrestre es uniforme, de módulo E_0, perpendicular a la superficie y dirigido hacia el centro de la Tierra.



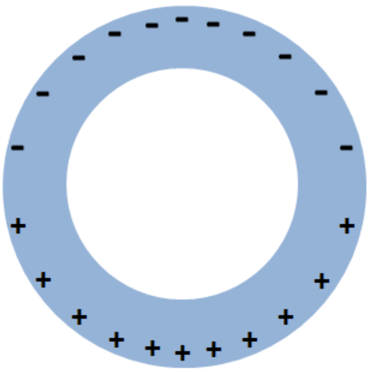
b) La carga total en cada hemisferio se obtiene por integración a partir de la distribución de densidad de carga: $Q = \int_S \sigma dS$. El elemento infinitesimal de superficie es $dS = 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$. En el hemisferio inferior, la carga total es

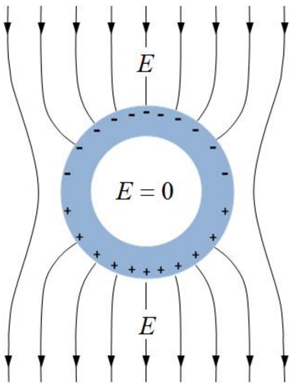
$$Q = \int_S (3\varepsilon_0 E \cos\theta)(2\pi a^2 \sin\theta d\theta) = 3\varepsilon_0 E \pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = 3\pi a^2 \varepsilon_0 E .$$

En el hemisferio superior la carga total es la misma, pero de signo negativo.

(La polarización que produce el campo en la esfera es equivalente al efecto de un dipolo eléctrico.)

c) Las cargas se redistribuyen en la superficie exterior de la corteza esférica de forma que el hemisferio superior adquiere carga neta negativa y el hemisferio inferior carga positiva. La concentración de cargas en la superficie exterior es mayor en los polos y nula en el ecuador. La carga se distribuye de manera que el campo en el interior del conductor y en la cavidad es nulo. Esto es debido a que la polarización de cargas en la superficie externa crea un campo eléctrico en el interior que compensa el campo exterior.





(Como resultado de la polarización de cargas en un conductor situado en un campo externo, se modifican líneas de campo de forma que éstas resultan perpendiculares a la superficie del conductor.)

d) El volumen de la esfera sólida es $V_{ext} = 4/3\pi a^3$, y el volumen del hueco esférico interior es $V_{int} = 4/3\pi(a-e)^3$, donde a es el radio exterior y e el espesor de la pared. Entonces, la masa de la corteza esférica es $m = \rho_{Mg}(V_{ext} - V_{int})$.

Real Sociedad Española de Física
R.S.E.F.

XXXIII Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

Así, el peso del medidor sin contar la atmósfera vale

$$P = m\,g = 81.6\ \text{N}\,.$$

Si tenemos en cuenta la atmósfera, por el principio Arquímedes el peso aparente del medidor que medirá el dinamómetro será ligeramente inferior:

$$P_{\text{a}} = P - \rho_{aire}\, g\, V_{ext} = 81.2\ \text{N}\,.$$

La existencia del campo eléctrico no afecta a la medida del peso. Podemos considerar la superficie terrestre como un plano cargado infinito, que crea una fuerza electrostática igual y de distinto signo sobre cada hemisferio. Por tanto la fuerza electrostática total sobre la corteza esférica es nula. Otra forma de justificarlo es la siguiente: el campo en que está inmerso el medidor es uniforme y su carga neta es nula, por tanto, la fuerza electrostática total que actúa sobre él es nula.

e) El peso debe compensarse con una fuerza electrostática dirigida hacia arriba. Como el sentido del campo eléctrico terrestre es hacia abajo, la carga que hay que depositar sobre el medidor es negativa. Del balance de fuerzas la carga resulta

$$-q\,E_0 - P_{\text{a}} = 0 \quad \rightarrow \quad q = -0.812\ \text{C}\,.$$

f) Como la carga inducida en el medidor es proporcional al campo eléctrico, sabemos que en la posición del globo, $y_1 = 4000\ \text{m}$, el campo eléctrico es $E(y_1) = E_0 / 5$. De la expresión del campo despejamos la constante de la exponencial:

$$E\left(y_1\right) = E_0 e^{-\alpha\, y_1} = E_0 / 5 \quad \rightarrow \quad \alpha = -\frac{\ln\left(1/5\right)}{y_1} = 4.02\cdot 10^{-4}\ \text{m}^{-1}\,.$$

g) El potencial eléctrico se calcula integrando el campo eléctrico a lo largo del eje Y. Tomando $V\left(y=0\right) = V_0 = 0$, se obtiene la expresión pedida:

$$\Delta V = V\left(y\right) - V_0 = -\int_0^y \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^y (-E_0 e^{-\alpha\, y})\, dy \quad \rightarrow \quad V\left(y\right) = \frac{E_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha\, y}\right).$$

El valor de la diferencia de potencial entre la superficie terrestre y el globo es

$$\Delta V = V(y_1) = 1.99\cdot 10^{5}\ \text{V}\,.$$

h) Podemos considerar que el valor de g es prácticamente constante en ese rango de altura y expresar la energía potencial gravitatoria como mgy con origen en $y_0 = 0$. Aplicamos la conservación de la energía:

$$qV_0 + m\,g\,y_0 + \frac{1}{2}mv_0{}^2 = qV\left(y_1\right) + m\,g\,y_1 + \frac{1}{2}mv_1{}^2\,.$$

Como hemos elegido $V_0 = 0$ y el enunciado dice que la partícula estaba en reposo sobre la superficie terrestre y que debe llegar al menos hasta al globo ($v_1 \geq 0$), podemos despejar la carga mínima (en valor absoluto) que debe adquirir la partícula de polvo:

$$q\,V\left(y_1\right) \leq -mgy_1 \quad \rightarrow \quad \left|q\right| \geq \frac{m\,g\,y_1}{V\left(y_1\right)} = 1.97\cdot 10^{-11}\ \text{C}\,.$$

Su signo es negativo.