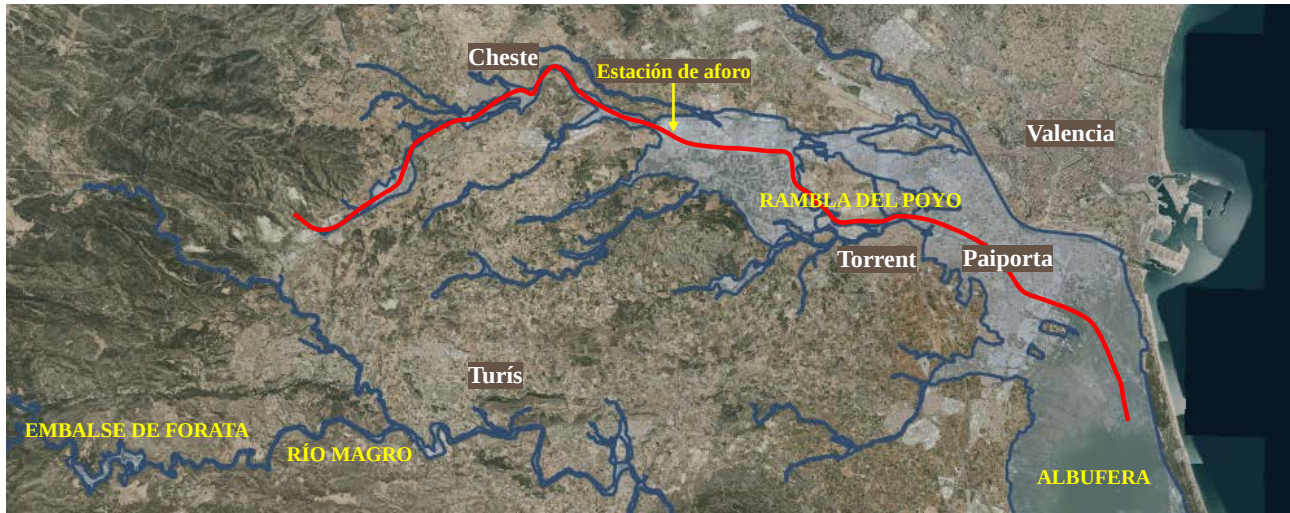


P1. La DANA de octubre

El 29 de octubre de 2024 una gota fría o DANA (depresión aislada en niveles altos) desencadenó un episodio extraordinario de lluvias que produjo el desbordamiento de ríos y ramblas en el sureste de la península. Las riadas causaron inundaciones relámpago especialmente catastróficas en la provincia de Valencia.

En este problema vamos a aplicar la física al campo de la hidrología para estudiar los efectos de las lluvias torrenciales y, en particular, las consecuencias de esta DANA.



Algunos datos del episodio

- La estación meteorológica de Turís registró el récord histórico de 185 l/m^2 en una hora.
- El embalse de Forata, en el río Magro, se llenó a su capacidad máxima de 39 hm^3 . Ante el riesgo de rotura de la presa se decidió abrir los aliviaderos para liberar agua.
- La estación de aforo de la rambla del Poyo midió

un caudal de $800 \text{ m}^3/\text{s}$ a las 18:00 h. La última lectura se registró a las 18:55 h con un caudal de $2283 \text{ m}^3/\text{s}$ y un nivel de agua de 4,9 m. Después el sensor dejó de funcionar. La estación, situada entre Cheste y Torrent, sólo puede medir el agua que la rambla recoge de la primera mitad de su cuenca, donde cayó una precipitación media de 500 l/m^2 en 6 horas. A la altura de Païporta se estima que pudieron circular unos $3500 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua.

Los pluviómetros miden el agua de lluvia de dos formas: en litros por metro cuadrado (l/m^2) o en milímetros (mm). La precipitación expresada en mm corresponde al espesor de la lámina de agua que se formaría sobre una superficie plana e impermeable.

- a) Obtenga la conversión entre mm y l/m^2 de lluvia. ¿Qué altura alcanzó el agua dentro de un caldero cilíndrico en Turís tras la hora de lluvia más intensa?

La intensidad de la precipitación es la precipitación por unidad de tiempo. Supongamos una precipitación constante de intensidad I que cae homogéneamente sobre una cuenca que abarca una superficie S . Como parte del agua se filtra en el suelo, la precipitación neta que discurre por el terreno es la precipitación real multiplicada por el llamado *coeficiente de escorrentía*, k . Toda el agua no infiltrada recogida por la cuenca genera al final de ésta un caudal de salida Q (el caudal es volumen por unidad de tiempo, $Q = dV / dt$).

- b) Obtenga el caudal Q que genera la lluvia al final de una cuenca, en función de I , S y k . Calcule el caudal máximo que circuló por la rambla del Poyo a la altura de la estación de aforo, sabiendo que su cuenca tiene una extensión de 479 km^2 y un coeficiente de escorrentía $k = 0,5$. (Recuerde que la estación sólo recoge agua de la mitad de la cuenca.)

El caudal máximo que vierte una cuenca a un cauce no se alcanza inmediatamente, justo cuando empieza a llover, sino progresivamente. Para estudiar cómo varía el caudal con el tiempo se utilizan los modelos hidrológicos, que nos permiten entender mejor las avenidas de agua. En el *modelo de reservorio* se considera una cuenca hidrográfica como un depósito abierto de superficie S , inicialmente vacío, cuyo volumen $V(t)$ varía debido al agua que aporta la lluvia al mismo tiempo que se desagua al cauce un caudal $Q(t)$. Este caudal es proporcional al volumen de agua contenido en el depósito, es decir: $Q(t) = V(t) / \tau$, donde τ es una constante con unidades de tiempo que da cuenta de la rapidez de una avenida. Para tener en cuenta la aportación de la lluvia al depósito, suponemos que llueve de forma constante y que la superficie de la cuenca recoge una intensidad de precipitación neta kI .

- c) Demuestre que el volumen de agua que acumula la cuenca-depósito es $V(t) = \tau S k I (1 - e^{-t/\tau})$. Obtenga la expresión para el caudal $Q(t)$. Después de un tiempo prolongado, cuando el caudal ha alcanzado un valor máximo constante, deja de llover. Obtenga el caudal $Q(t)$ a partir del instante en que cesa la lluvia. Haga una gráfica del caudal en función del tiempo con la forma aproximada de la curva de crecida y la curva de recesión.
- d) Calcule el parámetro τ para la cuenca de la rambla del Poyo. ¿En cuántos minutos se alcanzó el último caudal registrado de $2283 \text{ m}^3/\text{s}$, partiendo de un caudal nulo?

Una corriente de agua circula a velocidad u a través de una sección transversal A de un cauce.

- e) Determine el caudal Q de la corriente, en función de A y u . Obtenga la potencia mecánica P que genera la corriente, en función de Q , u y la densidad ρ del agua. ¿Cuál fue la velocidad y la potencia del agua en la rambla del Poyo a su paso por la estación de aforo justo antes de romperse el sensor? Datos: el perfil transversal del cauce de la rambla, donde está la estación, es rectangular de 100 m de anchura; la densidad del agua es 1000 kg/m^3 .

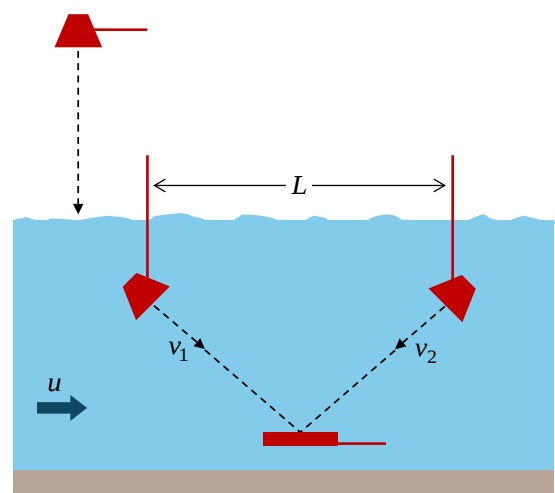
Suponga que cuando el embalse de Forata alcanzó su máxima capacidad de 39 hm^3 se hubiera roto la presa y que el vaciado total se hubiese producido en un tiempo de 1 h. Por simplicidad, consideramos que el embalse es paralelepípedo con un nivel del agua de 17 m.

- f) Calcule el valor de la potencia generada por el vaciado del agua del embalse.

Las estaciones de control hidrométrico juegan un papel muy importante a la hora de prever una inundación con antelación suficiente. Estas estaciones constan de *caudalímetros*, que son instrumentos que miden en tiempo real el caudal de un río a lo largo de su curso. Existen distintos tipos. Vamos a estudiar tres de ellos.

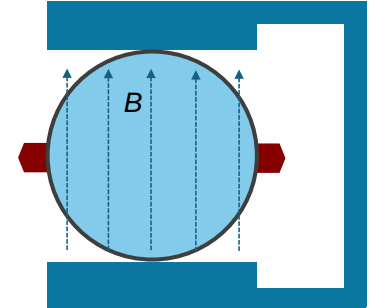
Un caudalímetro ultrasónico de tiempo de tránsito consta de dos sensores colocados a lo largo del curso del agua separados una distancia L , que actúan a la vez como emisores y detectores de ultrasonidos. Cada sensor envía ondas que llegan al otro sensor después de reflejarse en una superficie situada enfrente de ambos. Las ondas emitidas por el sensor situado aguas arriba tardan un tiempo t_1 en llegar al segundo sensor, mientras que las ondas del que está aguas abajo tardan un tiempo t_2 en alcanzar al primero.

- g) Demuestre que la velocidad del agua viene dada por la expresión $u \approx v_s^2 \Delta t / 2L$, donde v_s es la velocidad del sonido en el agua y $\Delta t = t_2 - t_1$. (Utilice que $u^2 \ll v_s^2$ cuando sea necesario.)



- h) Otro sensor de ultrasonidos, que hace de sensor de nivel, está situado a una altura de 10 m sobre el lecho del río. Suponemos que el cauce es rectangular de 5 m de ancho. El sensor de nivel detecta el eco de los ultrasonidos reflejados en la superficie del agua 20,5 ms después de haber sido emitidos. El caudalímetro de tiempo de tránsito tiene sus sensores separados una distancia $L = 1$ m y detecta una diferencia de tiempos $\Delta t = 5,5 \mu\text{s}$. La velocidad de sonido es de 343 m/s en el aire y de 1480 m/s en el agua. Calcule el caudal del río.

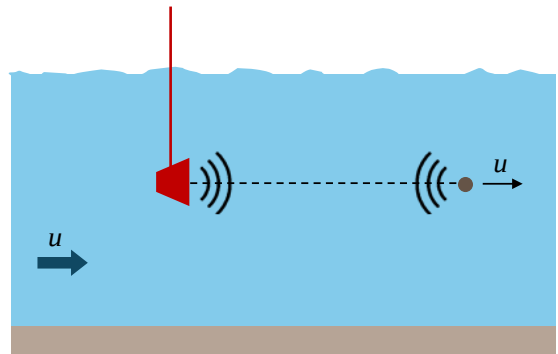
Un caudalímetro electromagnético consta de un tubo de material aislante situado en el entrehierro de un electroimán, el cual crea un campo magnético uniforme perpendicular a la corriente de agua. Como el agua contiene iones, a medida que ésta fluye por el tubo induce una diferencia de potencial eléctrico entre dos electrodos enfrentados situados en la pared del tubo en la dirección perpendicular al campo magnético.



- i) Obtenga la velocidad del agua u en función del campo magnético B , el voltaje ΔV medido por los electrodos y el diámetro D del tubo.

El caudalímetro ultrasónico de efecto Doppler consta de un sensor que emite ultrasonidos de frecuencia f_0 que se reflejan en pequeñas partículas de suciedad que viajan a la misma velocidad que el agua, arrastradas por la corriente. Las ondas reflejadas viajan aguas arriba y son detectadas por el sensor con una frecuencia f distinta a f_0 .

- j) Obtenga la velocidad del agua u en función de la velocidad v_s del sonido en el agua, la frecuencia f_0 y la diferencia de frecuencias $\Delta f = f_0 - f$.



P1. La DANA de octubre. SOLUCIÓN

- a) Sabemos que $1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$. Si ese volumen de lluvia cae sobre una superficie $S = 1 \text{ m}^2$, producirá una altura h de agua:

$$V = 10^{-3} \text{ m}^3 = Sh = 1 \text{ m}^2 \times h \rightarrow h = 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

Así, 1 l/m^2 equivale a 1 mm de altura de agua, sea cual sea la extensión de la superficie sobre la que cae.

El pico de lluvia registrado en la estación de Turís fue de 185 l/m^2 en una hora. Por tanto, sobre un caldero cilíndrico, la altura de agua habría llegado a 185 mm .

- b) La intensidad de la precipitación es $I = h/t$. Pero, como hay infiltración de agua en el terreno, la intensidad efectiva que produce escorrentía es $kI = kh/t$. Entonces, el volumen de agua recogido sobre una superficie S será $V = Skh = SkIt$. Como el caudal es volumen por unidad de tiempo, resulta

$$Q = SkI$$

Para calcular el caudal máximo que circuló por la rambla del Poyo a la altura de la estación de aforo, tenemos en cuenta que la rambla recibe el agua de escorrentía de la primera mitad de la cuenta, de extensión $S = (479/2) \text{ km}^2 = (479/2) \cdot 10^6 \text{ m}^2$. El coeficiente de escorrentía es $k = 0,5$. Según los registros cayeron 500 l/m^2 en 6 horas, lo que equivale a una intensidad de lluvia $I = 500 \text{ mm} / 6 \text{ h} = 0,5 \text{ m} / (6 \cdot 3600) \text{ s}$. Por tanto, el caudal que generó esa lluvia fue

$$Q = (479/2) \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot (0,5 / 6 \cdot 3600) = 2772 \text{ m}^3/\text{s}$$

- c) En el modelo de reservorio la cuenca es como un depósito que se llena con una aportación constante de agua kI , luego incrementa su volumen en una cantidad SkI . Al mismo tiempo desagua un caudal $Q(t)$, que varía en función del tiempo y que es proporcional al volumen de agua contenido en el depósito: $Q(t) = V(t)/\tau$. Por tanto, podemos escribir la variación en función del tiempo que experimenta el volumen del depósito como

$$\frac{dV(t)}{dt} = SkI - \frac{V(t)}{\tau}$$

No hace falta resolver la ecuación diferencial, porque el enunciado da la solución. Se trata de comprobar que la expresión dada es, en efecto, solución de la ecuación para el volumen encontrada:

$$V(t) = \tau SkI (1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow \begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = SkI e^{-t/\tau} \\ SkI - \frac{V(t)}{\tau} = SkI - SkI (1 - e^{-t/\tau}) = SkI e^{-t/\tau} \end{cases}$$

A partir de la solución para el volumen podemos escribir la expresión para el caudal, dividiendo por τ :

$$Q(t) = SkI (1 - e^{-t/\tau})$$

Después de un tiempo suficientemente largo lloviendo, el depósito alcanza un volumen máximo constante: $V_{\max} = \tau SkI$. Cuando cesa la lluvia, el depósito deja de recibir agua y sólo se vacía. La ecuación de la variación del volumen es ahora:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{V(t)}{\tau} \rightarrow \frac{dV(t)}{V(t)} = -\frac{dt}{\tau},$$

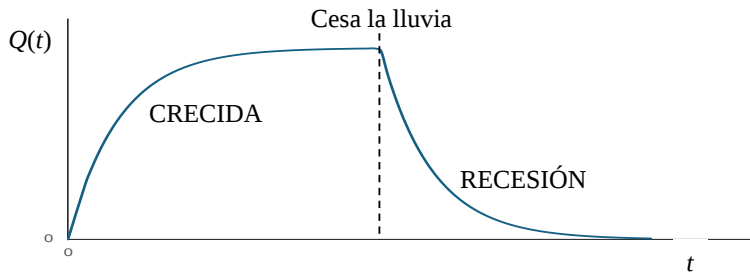
cuya solución se obtiene por simple integración, sabiendo que en $t = 0$ el volumen es el máximo:

$$\int_{V_{\max}}^V \frac{dV(t)}{V(t)} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau} \rightarrow \ln \frac{V(t)}{V_{\max}} = -\frac{t}{\tau} \rightarrow V(t) = V_{\max} e^{-t/\tau}$$

Por tanto, el caudal de vaciado a partir del instante en que cesa la lluvia es

$$Q(t) = SkI e^{-t/\tau}$$

El comportamiento del caudal que desagua la cuenca se representa en la siguiente gráfica:



Tanto la crecida como la recesión del caudal son exponenciales con este modelo, que, aunque muy simple, captura bastante bien el comportamiento de estas avenidas e inundaciones relámpago.

Nota: En estos modelos no tenemos en cuenta el llamado “tiempo de concentración”, que es el tiempo necesario para que la escorrentía de agua llegue al punto de desagüe en el cauce desde el punto más alejado de la cuenca.

- d) Para calcular el parámetro τ para la cuenca de la rambla del Poyo tenemos en cuenta los dos registros de caudal, medidos en la estación de aforo, que da el enunciado: $Q_1 = 800 \text{ m}^3/\text{s}$ y $Q_2 = 2283 \text{ m}^3/\text{s}$.

Con la expresión del caudal obtenida antes, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} Q_1 = Q_{\max} - Q_{\max} e^{-t_1/\tau} \\ Q_2 = Q_{\max} - Q_{\max} e^{-t_2/\tau} \end{cases}$$

donde $Q_{\max} = SkI = 2772 \text{ m}^3/\text{s}$, obtenido en el apartado b), y $t_2 = t_1 + 55 \text{ min}$, ya que los caudales se registraron a las 18:00 h y a las 18:55 h. Dividiendo las dos ecuaciones, resulta:

$$\frac{Q_{\max} - Q_1}{Q_{\max} - Q_2} = e^{(t_2 - t_1)/\tau} \rightarrow \tau = \frac{(t_2 - t_1)}{\ln((Q_{\max} - Q_1)/(Q_{\max} - Q_2))} = \frac{55 \text{ min}}{\ln((2772 - 800)/(2772 - 2283))}$$

$$\tau = 39,44 \text{ min} = 0,66 \text{ h}$$

Es un tiempo de crecimiento exponencial muy corto que indica que la crecida de la rambla fue rapidísima.

Para hallar el tiempo en que se registró la última medida de caudal $Q_2 = 2283 \text{ m}^3/\text{s}$, despejamos t_2 de la ecuación del caudal sabiendo que en $t = 0$ se partía de un caudal nulo:

$$Q_2 = Q_{\max} - Q_{\max} e^{-t_2/\tau} \rightarrow \frac{Q_{\max} - Q_2}{Q_{\max}} = e^{-t_2/\tau} \rightarrow t_2 = -\tau \ln\left(\frac{2772 - 2283}{2772}\right)$$

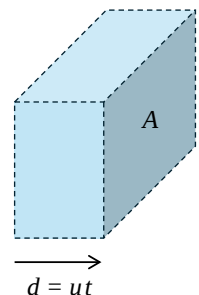
$$t_2 = 68,4 \text{ min}$$

- e) La corriente, a velocidad u , avanza una distancia $d = ut$ en un tiempo t . Así, el volumen de agua transportando en ese tiempo es $V = Ad = Aut$. Por tanto, el caudal es

$$Q = Au$$

La potencia mecánica se puede obtener como la energía cinética del agua por unidad de tiempo. Si ρ es la densidad del agua, la energía cinética del volumen V de agua es

$$E_c = \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} \rho V u^2$$



Por tanto, la potencia que genera la corriente de agua será

$$P = \frac{1}{2} \rho Q u^2$$

En concreto, en la rambla del Poyo a su paso por la estación de aforo, la velocidad del agua, justo antes de romperse el sensor, puede calcularse a partir del último registro de caudal, $2283 \text{ m}^3/\text{s}$, y sabiendo que la sección transversal del cauce tiene 100 m de anchura y que el nivel de agua llegó a $4,9 \text{ m}$. Resulta:

$$u = \frac{Q}{A} = \frac{2283}{100 \cdot 4,9} = 4,66 \text{ m/s}$$

Y la potencia resulta:

$$P = \frac{1}{2} 1000 \cdot 2283 \cdot 4,66^2 = 24,8 \cdot 10^6 \text{ W} = 24,8 \text{ MW}$$

- f) En este caso, la potencia se obtiene de la energía potencial del agua acumulada en el embalse. Si el agua sobre el embalse alcanzó una altura h , la energía potencial se puede calcular como si toda el agua estuviera a una altura $h/2$, ya que la expresión de la energía es lineal con la altura y no hace falta integrar. Así, tenemos:

$$E_p = mg \frac{h}{2} = \rho V g \frac{h}{2}$$

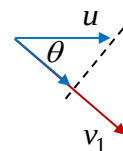
Si se rompe la presa, la energía liberada por los 39 hm^3 del embalse (a un nivel de 17 m) en el tiempo de vaciado (que el enunciado dice que sería de 1 h) generará una potencia:

$$P = \frac{1000 \cdot (39 \cdot 10^6) \cdot 9,8 \cdot (17/2)}{3600} = 0,9 \cdot 10^9 \text{ W} = 0,9 \text{ GW}$$

- g) Las velocidades v_1 y v_2 del sonido a favor y en contra de la corriente, respectivamente, son

$$\begin{cases} v_1 = v_s + u \cos \theta \\ v_2 = v_s - u \cos \theta \end{cases}$$

donde θ es el ángulo que forma la dirección de propagación del sonido respecto a la dirección de la corriente del agua, y v_s es la velocidad del sonido en el agua.



La diferencia entre los tiempos de tránsito de las ondas emitidas por los dos sensores será

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2d}{v_2} - \frac{2d}{v_1} = 2d \left(\frac{1}{v_s - u \cos \theta} - \frac{1}{v_s + u \cos \theta} \right) = 2d \frac{2u \cos \theta}{v_s^2 - u^2 \cos^2 \theta} \approx \frac{2Lu}{v_s^2}$$

donde $\cos \theta = (L/2)/d$ y hemos despreciado $u^2 \cos^2 \theta$ frente a v_s^2 en el denominador. Despejando, obtenemos la velocidad del agua:

$$u = \frac{v_s^2 \Delta t}{2L}$$

- h) El sensor de nivel detecta los ultrasonidos reflejados en la superficie del agua en un tiempo de ida y vuelta de $20,5 \text{ ms}$. Por tanto, utilizando la velocidad de sonido (343 m/s), se obtiene una distancia del sensor a la superficie del agua:

$$2d = 343 \cdot (20,5 \cdot 10^{-3}) \rightarrow d = 3,5 \text{ m}$$

Entonces, la profundidad del agua es $h = 10 - d = 6,5 \text{ m}$, y el área transversal del cauce atravesada por el agua es $A = 5 \cdot 6,5 = 32,5 \text{ m}^2$.

Por otro lado, con el sensor de tiempo de tránsito obtenemos la velocidad del agua:

$$u = \frac{1480^2 (5,5 \cdot 10^{-6})}{2 \cdot 1} = 6 \text{ m/s}$$

Por tanto, según el resultado del apartado e), el caudal del río resulta

$$Q = Au = 32,5 \cdot 6 = 195 \text{ m}^3/\text{s}$$

- i) Los iones del agua, que viajan a velocidad u perpendicular al campo magnético, experimentan la fuerza de Lorentz:

$$F = quB$$

Las cargas positivas y negativas son desviadas en la dirección paralela a los electrodos, donde se acumulan. Así, las cargas en cada electrodo crean un campo eléctrico en el electrodo de enfrente:

$$E = F / q = uB$$

lo que origina una diferencia de potencial eléctrico entre los electrodos dada por

$$\Delta V = E \cdot D = uBD$$

Así, la velocidad del agua se obtendría de la medición ΔV del caudalímetro como

$$u = \frac{\Delta V}{DB}$$

- j) Cuando los ultrasonidos viajan corriente abajo, tenemos una fuente en reposo y un observador (la partícula) que se aleja a velocidad u . Además, las ondas viajan en un medio que también se mueve a velocidad u en el sentido de las ondas, así que la velocidad de las ondas es $v_1 = v_s + u$. Según el efecto Doppler, la frecuencia percibida por una partícula que viaja con la corriente será

$$f_1 = f_0 \frac{v_1 - u}{v_1} = f_0 \frac{v_s}{v_s + u}$$

Cuando los ultrasonidos viajan contracorriente, tenemos una fuente que emite ondas de frecuencia f_1 y que se aleja a velocidad u , y un observador (el detector) en reposo. La velocidad de las ondas es ahora $v_2 = v_s - u$. Por el efecto Doppler, la frecuencia percibida por el detector será

$$f_2 = f_1 \frac{v_2}{v_2 + u} = f_1 \frac{v_s - u}{v_s} = f_0 \frac{v_s}{v_s + u} \frac{v_s - u}{v_s} = f_0 \frac{v_s - u}{v_s + u}$$

La diferencia de frecuencias detectada, teniendo en cuenta que la velocidad del sonido es mucho mayor que la de la corriente de agua, resulta

$$\Delta f = f_0 - f_2 = f_0 \frac{2u}{v_s + u} \approx f_0 \frac{2u}{v_s}$$

Y, despejando, obtenemos la velocidad: $u = \frac{v_s \Delta f}{2 f_0}$

Nota: También se puede resolver tomando el sistema de referencia en el agua, con una fuente que se aleja (con observador en reposo) y, tras la reflexión, un observador que se aleja (con fuente en reposo).

Algunas fuentes de consulta

“Informe sobre el episodio meteorológico de precipitaciones torrenciales y persistentes ocasionadas por una DANA el día 29 de octubre de 2024”. Agencia Estatal de Meteorología (AEMET).

https://www.aemet.es/documentos/es/conocerlas/recursos_en_linea/publicaciones_y_estudios/estudios/informe_episodio_dana_29_oct_2024_.pdf

Sistema Automático de Información Hidrológica (SAIH), Confederación Hidrográfica del Júcar.

<https://saih.chj.es/chj/saih/?f>