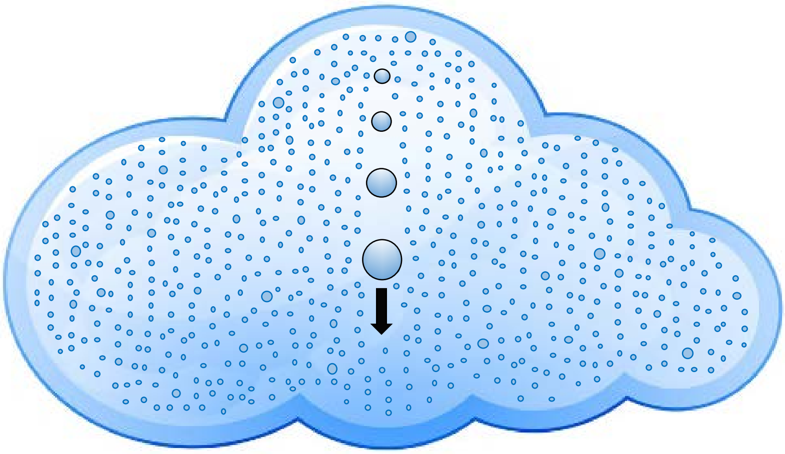
P1 Una gota de nube



Una nube es un agregado de gotas de agua microscópicas (nubes calientes), pequeños cristales de hielo (nubes frías) o una mezcla de ambos (nubes mixtas), en suspensión en la atmósfera. Las gotas en una nube se forman por condensación de vapor de agua alrededor de partículas microscópicas llamadas *núcleos de condensación* (polvo, polén, etc.) cuando el aire alcanza su humedad máxima (aire *saturado*) y ya no admite más vapor de agua. A partir de entonces, cualquier cantidad adicional de vapor de agua forma gotitas o cristalitos de hielo.

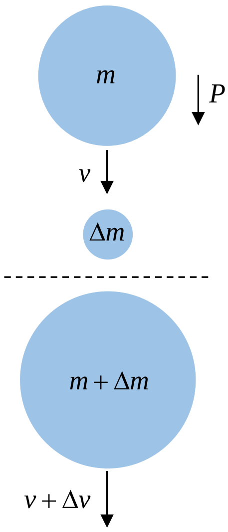
El tamaño de las pequeñas gotitas (o *gotículas*) que se forman dentro de las nubes varía desde unas pocas micras hasta varias decenas de micras. Las gotas más pequeñas no caen debido a las corrientes ascendentes dentro de la nube que contrarrestan su peso, pero las más pesadas pueden empezar a caer. Cuando una gota cae a través de la nube va colisionando con las gotículas que encuentra a su paso y las captura, de forma que la gota va creciendo poco a poco. Cuando estas gotas abandonan la nube pasan a ser gotas de lluvia, que alcanzan tamaños de varios milímetros.

En este problema vamos a estudiar la física de una gota que crece mientras desciende dentro de una nube. Utilizaremos un modelo de gota esférica de agua, de densidad constante $\rho = 1\ \text{g/cm}^3$ y radio *r*, que cae por acción de la gravedad. Consideraremos que la gota tiene un diámetro de 100 μm cuando empieza la caída, y de 1 mm justo antes de salir de la nube, donde cae con una velocidad $v_f = 3\ \text{m/s}$.

a) Al movimiento de caída de la gota se opone la fuerza de fricción con el aire, F_η, que viene expresada por la ley de Stokes: $F_\eta = 6\pi r \eta v$, donde $\eta = 1{,}83\times 10^{-5}\ \text{Pa}\cdot\text{s}$ es el coeficiente de viscosidad del aire y *v* es la velocidad de la gota. Compruebe que la fuerza de fricción es despreciable para las gotas estudiadas dentro de la nube.

b) Cuando la gota sale de la nube se convierte en una gota de lluvia y deja de crecer. Calcule la velocidad *límite* uniforme que tendería a alcanzar la gota de lluvia suponiendo válida la ley de Stokes.

Volvamos al interior de la nube. Por lo concluido en el apartado a), despreciaremos la resistencia del aire sobre las gotas dentro de la nube en el resto del problema.



Considere una gota que en un cierto instante tiene masa *m* y cae verticalmente con velocidad *v*, debido a su peso *P*, y que choca contra una gotícula en reposo de masa $\Delta m \ll m$. Tras la colisión, la masa de la gota es $m + \Delta m$ y su velocidad $v + \Delta v$. Suponga que el tiempo Δt que dura la colisión es muy pequeño y que se producen muchas colisiones por unidad de tiempo, de forma que las variaciones de masa y de velocidad pueden considerarse procesos continuos.

c) Aplique la 2ª ley de Newton, planteando explícitamente la variación del momento lineal entre los instantes anterior y posterior a la colisión, y demuestre que la aceleración de caída de la gota es

$$a = g - \frac{v}{m}\frac{dm}{dt} \qquad (1)$$

Ayuda: Tenga en cuenta que $\Delta m \Delta v \approx 0$, y que $\dfrac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta t}$.

El cociente dm/dt que aparece en la ecuación (1) es el ritmo de *acreción* de la gota (la cantidad de masa que va adquiriendo por unidad de tiempo), y depende de diversos factores. Vamos a estudiar un modelo sencillo en el que cuanto mayor es la sección y la velocidad de la gota, y cuanta más agua contiene la nube, más gotitas chocan con la gota por unidad de tiempo. Así, considere que el ritmo de acreción es directamente proporcional al área de la sección circular de la gota, a su velocidad de caída y a la densidad de agua en la nube ρ_n.

d) Demuestre que, de acuerdo con el modelo de crecimiento propuesto, la variación con el tiempo de la masa de la gota dentro de la nube es

$$\frac{dm}{dt} = \lambda m^{2/3} v \qquad (2)$$

donde λ es una constante de proporcionalidad que depende de ρ y ρ_n.

A partir del modelo anterior, puede probarse que la velocidad de la gota en función de su masa (para valores iniciales de la masa despreciables) es

$$v = \left(\frac{6g}{7\lambda}\right)^{1/2} m^{1/6} \qquad (3)$$

e) Compruebe que la aceleración (1) de caída de la gota tiene un valor constante y determine dicho valor. Determine también la velocidad de la gota en función del tiempo, $v(t)$.

Por último, vamos a estudiar algunos aspectos energéticos de la gota. Considere que la gota ha descendido una altura *h* dentro de la nube, partiendo del reposo.

f) Determine la energía cinética final de la gota tras recorrer la distancia vertical *h*.

g) Determine el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre la gota durante la caída de altura *h*.

Ayuda: $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + cte$

h) Comparando los resultados de los dos apartados anteriores, obtenga cómo varía la temperatura de la gota en función de la altura *h* descendida. El calor específico del agua es *c*. ¿Qué otros factores no tenidos en cuenta cree que podrían afectar a dicha temperatura?

P1 Solución

a) Como la densidad es constante, el peso de la gota es

$$P = mg = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g$$

Comparamos la fuerza de fricción y el peso:

$$\frac{F_\eta}{P} = \frac{6\pi r \eta v}{m g} = \frac{6\pi r \eta v}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g} = \frac{9\eta v}{2\rho g r^2} \qquad (4)$$

Entonces, de (4), la fuerza de fricción será despreciable cuando

$$F_\eta \ll P \quad \rightarrow \quad v \ll \frac{2\rho g}{9\eta} r^2 = 1{,}2 \times 10^8 \cdot r^2$$

En el momento de empezar a caer, las gotitas tienen velocidad nula y, por tanto, no hay fricción. Tras caer atravesando la nube, las gotas tienen radio $r_f = 1\ \text{mm}/2 = 0{,}5\ \text{mm}$ y velocidad $v_f = 3\ \text{m/s}$. Entonces se cumple $F_\eta \ll P$ ya que $v_f = 3\ \text{m/s} \ll (2\rho g / 9\eta) r_f^2 = 30\ \text{m/s}$.

Ocurre que conforme las gotas adquieren velocidad (lo que hace aumentar la fricción) también van creciendo y, por tanto, aumenta su radio. En balance, la fricción se va haciendo cada vez más pequeña respecto al peso.

Por tanto, podemos despreciar la resistencia del aire para esas gotas dentro de la nube.

b) Tras salir de la nube, la gota de lluvia va ganando velocidad, pero su radio no crece más, de forma que ya no podemos despreciar la fuerza de fricción. Del balance de fuerzas, obtenemos la aceleración de caída de la gota:

$$ma = P - F_\eta = m g - 6\pi r \eta v \quad \rightarrow \quad a = g - \frac{6\pi r \eta}{m} v$$

Cuando se alcanza la velocidad límite, v_l, la aceleración es nula (la fricción iguala al peso) y así

$$g - \frac{6\pi r \eta}{m} v_l = 0 \quad \rightarrow \quad v_l = \frac{2\rho g}{9\eta} r^2 = 30\ \text{m/s}$$

En realidad, para el tamaño típico de las gotas de lluvia deja de ser válida la ley de Stokes, y además las gotas dejan de tener forma esférica, por lo que la resistencia del aire habría que modelarla teniendo en cuenta un coeficiente de resistencia aerodinámica.

c) La variación del momento lineal entre los instantes anterior y posterior a la colisión es:

$$\Delta p = p_{\text{después}} - p_{\text{antes}} = (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv$$

Teniendo en cuenta que $\Delta m \Delta v \approx 0$, lo anterior queda:

$$\Delta p \approx m \Delta v + v \Delta m \qquad (5)$$

Aplicando la 2ª ley de Newton (para la fuerza peso, pues despreciamos el rozamiento) y la definición de límite:

$$P = mg = \frac{dp}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Y utilizando la variación del momento lineal, (5), resulta:

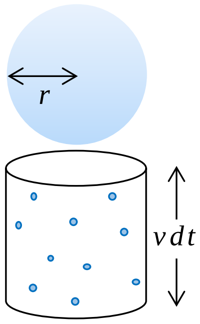
$$mg = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m\Delta v + v\Delta m}{\Delta t} = m \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} + v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = ma + v\frac{dm}{dt}$$

Despejando la aceleración se obtiene la expresión pedida:

$$\boxed{a = g - \frac{v}{m}\frac{dm}{dt}} \qquad (6)$$

Como en este problema no se mantiene constante la masa, hay que aplicar la 2ª ley de Newton en su forma más general: $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt = d(m\boldsymbol{v})/dt = m\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}\,dm/dt$. Se ha pedido llegar a dicha expresión a partir de los incrementos Δm y Δv producidos en el arrastre de la gotícula.

d) El modelo de acreción propuesto se basa en el hecho de que en un tiempo dt la gota (esférica) captura todas las g otitas que hay en un volumen cilíndrico de nube $dV = \pi r^2 v dt$. Por tanto, la gota adquiere una masa adicional $dm = \rho_n dV = \rho_n \pi r^2 v dt$, donde ρ_n es la densidad de agua que contiene la nube (típicamente de 1 a 3 g/m^3).



Como dice el enunciado, el aumento de masa por unidad de tiempo es proporcional a la sección πr^2, a la velocidad y a la densidad ρ_n:

$$\frac{dm}{dt} = k\rho_n\left(\pi r^2\right)v \qquad (7)$$

La constante k da cuenta de la efectividad con que las gotículas se unen a la gota. En particular, $k=1$ cuando la gota captura todas las gotículas que encuentra a su paso.

Como la densidad de la gota es $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{4/3\pi r^3}$, el radio de la gota en función de su masa es

$$r = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \qquad (8)$$

Llevando el radio (8) a (7), resulta:

$$\frac{dm}{dt} = k\rho_n\pi\left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3} v = k\rho_n\pi\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3} m^{2/3}v$$

Y, por tanto, definiendo una nueva constante: $\lambda = k\rho_n\pi\left(\dfrac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3}$, queda la expresión pedida:

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = \lambda m^{2/3} v} \qquad (9)$$

e) Llevando las expresiones $\dfrac{dm}{dt} = \lambda m^{2/3} v$ y $v = \left(\dfrac{6g}{7\lambda}\right)^{1/2} m^{1/6}$ a la ecuación (1) que nos da la aceleración de la gota, se obtiene:

$$a = g - \frac{v}{m}\frac{dm}{dt} = g - \frac{v}{m}\lambda m^{2/3} v = g - \lambda\frac{v^2}{m^{1/3}} = g - \lambda\left(\frac{6g}{7\lambda}\right)^{2/2}\frac{m^{2/6}}{m^{1/3}} = g - \frac{6g}{7}$$

Por tanto:

$$\boxed{a = \frac{1}{7}g = \text{cte}} \qquad (10)$$

Es decir, la gota desciende con aceleración constante. Puesto que la gota comienza a caer con velocidad inicial nula, obtenemos la velocidad en función del tiempo mientras la gota crece dentro de la nube:

$$\boxed{v(t) = at = \frac{g}{7}t} \qquad (11)$$

f) Como, de (3), la masa es $m = (7\lambda/6g)^3 v^6$, obtenemos para la energía cinética la expresión

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{7\lambda}{6g}\right)^3 v^8 \tag{12}$$

Por cinemática, la velocidad de la gota tras descender una altura *y* es:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}at^2 \\ v &= at \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2ay} = \sqrt{2\frac{g}{7}y} \tag{13}$$

Entonces, la energía cinética pedida cuando $y = h$ es:

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{7\lambda}{6g}\right)^3 \left(2\frac{g}{7}h\right)^{8/2} = \frac{\lambda^3 g}{189} h^4 \tag{14}$$

g) El trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es

$$W = \int_0^h P\,dy = \int_0^h mg\,dy \tag{15}$$

La masa se puede expresar en función de la altura *y* teniendo otra vez en cuenta la relación cinemática (13):

$$m = \left(\frac{7\lambda}{6g}\right)^3 \left(2\frac{g}{7}y\right)^{6/2} = \left(\frac{\lambda}{3}\right)^3 y^3 \tag{16}$$

Entonces, el trabajo (15) puede obtenerse con una sencilla integral:

$$W = g\int_0^h \left(\frac{\lambda}{3}\right)^3 y^3\,dy = g\,\frac{\lambda^3}{27}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{\lambda^3 g}{108} h^4 \tag{17}$$

h) La energía cinética adquirida por la gota (14) es menor que el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad (17): $E_c < W$. Ello es debido a que las colisiones de la gota con las gotículas son inelásticas y, por tanto, se pierde energía en forma de calor:

$$Q = W - E_c = \frac{\lambda^3 g}{108} h^4 - \frac{\lambda^3 g}{189} h^4 = \frac{\lambda^3 g}{252} h^4 \tag{18}$$

Si suponemos que este calor va íntegramente a la gota, su temperatura aumentará conforme desciende en el seno de la nube: $Q = c\,m\,\Delta T$, donde *c* es el calor específico del agua.

De (16) la masa es $m = \frac{\lambda^3}{27} h^3$, y de (18) tenemos el calor. Así:

$$Q = \frac{\lambda^3 g}{252} h^4 = c\,m\Delta T = c\,\frac{\lambda^3}{27} h^3\,\Delta T \quad \rightarrow \quad \Delta T = \frac{3gh}{28c}$$

La temperatura de la gota aumenta linealmente con la altura descendida, aunque el valor es muy pequeño: unos $0{,}25\times 10^{-3}$ ºC por cada metro.

En el cálculo anterior no se ha tenido en cuenta que la temperatura de las gotitas es inferior a la de la gota (si se supone que la temperatura en la nube es homogénea). Tener en cuenta el intercambio de calor entre la gota y las gotitas complica, obviamente, el cálculo. Tampoco hemos considerado las pérdidas de energía por conducción, convección y radiación. Además, el modelo no tiene en cuenta el rozamiento de la gota de lluvia con el aire, que también disipa parte de la energía de la gota en forma de calor.