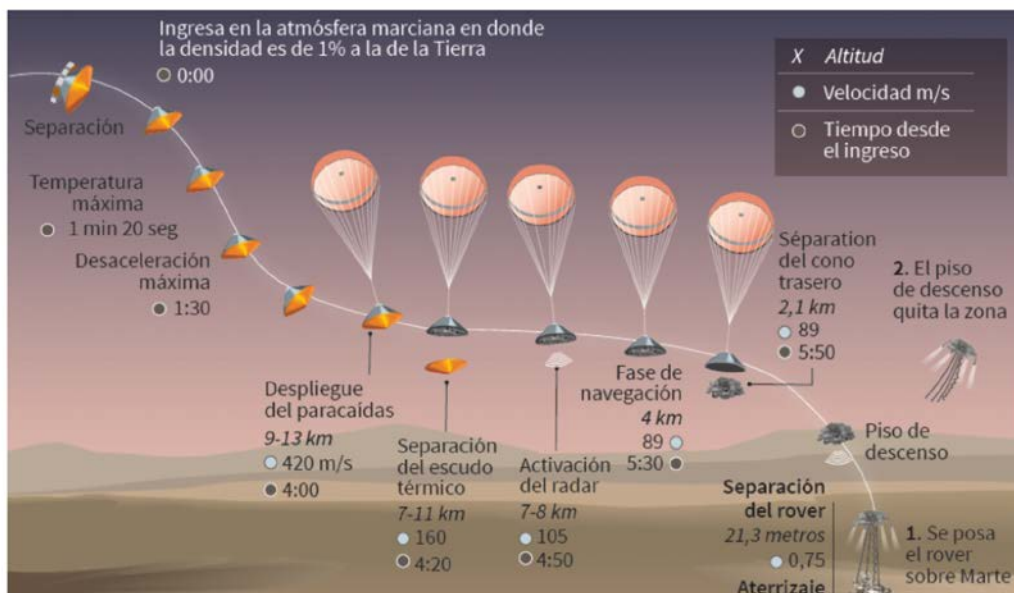


P1. El paracaídas del *Perseverance*

El 18 de febrero se depositó sobre la superficie de Marte la estación espacial *Perseverance*, uno de los mayores éxitos de la ciencia y de la técnica para la conquista del espacio. Transportando un equipo de exploración de unos 4 000 kg, entró en la atmósfera ligera de Marte a la velocidad de unos 20 000 km/s, y en los 7 minutos *de terror* para todo el equipo de control, la redujo a valores moderados para el *amartizaje*, con ayuda de motores de retención. El vuelo del cohete, el diseño y construcción de la estación, y su aproximación y depósito en el suelo de Marte han sido un éxito histórico del que se esperan resultados de gran interés científico.



El problema básico a resolver en un paracaídas es el de la sustentación de su tela sobre el gas atmosférico, debida a las diferencias de presión que se originan en el desplazamiento, que son de muy difícil tratamiento matemático en el régimen turbulento con que ocurre el descenso. Eludiremos esa complejidad admitiendo un tratamiento alternativo, idealizado en exceso: el paracaídas descendería sin producir corrientes de aire, con una sustentación debida exclusivamente al impacto de la lona al caer sobre las moléculas atmosféricas supuestamente en reposo. Además, supondremos que los gases de la atmósfera de Marte se comportan como un gas ideal.

Tabla de constantes:

Constante gravitacional, $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Constante de los gases ideales, $R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Masa de Marte, $M_{\delta} = 6,42 \times 10^{23} \text{ kg}$

Radio de Marte, $R_{\delta} = 3\,390 \text{ km}$

Presión atmosférica media en la superficie de Marte, $P_0 = 600 \text{ Pa}$

Temperatura atmosférica media de Marte, $T = -46 \text{ °C}$

Masa molecular media del gas atmosférico de Marte: (95,3% de CO_2 + otros gases), $M_m = 0,043 \text{ kg mol}^{-1}$

- a) Calcule la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte. [0,5 puntos]
- b) Calcule la densidad de la atmósfera de Marte: en la superficie, a una altura de 2 km (cuando se desprende el paracaídas) y a una altura de 10 km (cuando se despliega el paracaídas). Ayuda: considere que la presión atmosférica disminuye con la altura según la llamada fórmula barométrica

$$P_h = P_0 \exp\left(-\frac{g M_m}{RT} h\right),$$

siendo P_0 la presión atmosférica en $h = 0$.

[2 puntos]

- c) Para simplificar el problema, supondremos ahora que el gas atmosférico está perfectamente en calma, que la lona del paracaídas es plana y circular, y que mientras desciende a velocidad v arrastra consigo a las moléculas de gas que encuentra a su paso (sin afectar a las que no encuentra a su paso), las cuales van saliendo por los lados del paracaídas tras golpearlo. Deduzca la fuerza de frenado por unidad de área del paracaídas en función de la densidad atmosférica y de la velocidad de descenso. Se sugiere utilizar la expresión diferencial de la 2ª ley de Newton. [3 puntos]
- d) Determine la expresión del radio mínimo de la lona del paracaídas necesaria para que descienda a velocidad constante en función de ésta y de las variables atmosféricas presión y temperatura. Calcule el valor del radio para la carga de 4 000 kg y la velocidad de 89 m/s (valor aproximado en el momento de desprenderse el paracaídas para el encendido de los motores). [2 puntos]
- e) Calcule la fuerza por unidad de área F/S a la altura $h = 10$ km y velocidad $v = 420$ m/s en el momento del despliegue. [0,5 puntos]
- f) Calcule la aceleración de la estación en las condiciones del punto anterior, conocido el tamaño del paracaídas del apartado d). [2 puntos]

P1. Solución

a) $g = G \frac{M_{\delta}}{R_{\delta}^2} = 3,73 \text{ m s}^{-2}$

- b) La densidad se calcula para 1 mol de aire, de masa molar M_m y volumen V_m , con la ecuación de los gases ideales:

$$\rho \equiv \frac{M_m}{V_m} = \frac{M_m}{RT / P} = \frac{PM_m}{RT}$$

En la superficie de Marte, con una presión $P_0 = 600 \text{ Pa}$, la densidad resulta $0,014 \text{ kg m}^{-3}$

En $h = 2 \text{ km}$, $P_h = P_0 \exp\left(-\frac{3,73 \cdot 0,043}{8,31 \cdot 227} \cdot 2000\right) = 506,2 \text{ Pa}$. La densidad resulta $0,012 \text{ kg m}^{-3}$

En $h = 10 \text{ km}$, $P_h = 256,4 \text{ Pa}$ y la densidad vale $0,006 \text{ kg m}^{-3}$

- c) La fuerza de frenado es la de interacción entre la lona y las moléculas de aire que van siendo atrapadas, siendo igual a la variación temporal del momento que experimentan todas las moléculas alcanzadas por la tela:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

En un tiempo dt , el paracaídas, que avanza a velocidad v , arrastra todas las moléculas dentro de un volumen cilíndrico de gas $dV = Sv dt$, cuya masa total es $dm = \rho dV = \rho Sv dt$

El cambio de la cantidad de movimiento que experimenta dicha masa es

$$dp = dm \cdot v - dm \cdot 0 = v dm = v \rho Sv dt = v^2 \rho S dt$$

Por tanto, la fuerza resulta $F = \frac{dp}{dt} = \frac{v^2 \rho S dt}{dt} = \rho v^2 S$

Y la fuerza por unidad de área del paracaídas es

$$\frac{F}{S} = \rho v^2$$

- d) El *Perseverance* alcanza una velocidad límite constante cuando la fuerza de frenada del paracaídas iguala al peso:

$$F = \rho v^2 S = Mg$$

La superficie del paracaídas es $S = \pi r^2$, donde r es el radio. Utilizando el valor $0,012 \text{ kg m}^{-3}$ de la densidad, calculado en el apartado b) para la altura $h = 2 \text{ km}$, obtenemos

$$r = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{Mg}{\pi \rho}} = 7,07 \text{ m}$$

Este resultado es una buena aproximación, a pesar del modelo simplificado que hemos utilizado, ya que el radio real fue de unos 11 m.

- e) La densidad a la altura $h = 10$ km, del apartado b), es $0,006 \text{ kg m}^{-3}$, donde la velocidad es $v = 420 \text{ m/s}$. Así, la fuerza por unidad de área pedida en el momento del despliegue del paracaídas es

$$\frac{F}{S} = \rho v^2 = 1058,4 \text{ Pa}$$

- f) La fuerza total sobre la estación *Perseverance* es la diferencia entre el peso y la fuerza de frenado del paracaídas:

$$F = Mg - \rho v^2 S$$

Obtenemos la aceleración despejando de la ecuación anterior y utilizando las cantidades obtenidas previamente: la gravedad del apartado a), el tamaño del paracaídas obtenido en el apartado d) y la densidad a la altura $h = 10$ km. En el momento del despliegue del paracaídas la aceleración instantánea es

$$a = g - \frac{\rho v^2 S}{M} = -37,8 \text{ m s}^{-2}$$