P1.- Torre de perdigones.

Los líquidos en ausencia de gravedad tienden a adoptar la forma esférica debido a los efectos de la tensión superficial. Este es el caso de las gotas de un líquido en caída libre puesto que, en estas circunstancias, experimentan una gravedad aparente nula.

En este fenómeno se ha basado, hasta bien entrado el siglo XX, la fabricación de perdigones esféricos de plomo en las llamadas *torres de perdigones*. El método, patentado por William Watts en 1782, no se utiliza en la actualidad, pero se conservan numerosas torres de perdigones, unas en ruinas, otras formando parte de museos y alguna, como la de Sevilla de 58 m de altura (figura 1), constituye un interesante motivo turístico.

Fig. 1

El fundamento del método consiste en fundir plomo en lo alto de la torre[1] en un depósito cuyo fondo, a modo de colador, tiene numerosos orificios por los que caen chorros de plomo líquido. Los chorros son inestables[2] y la elevada tensión superficial del plomo fundido hace que al poco de iniciarse la caída se originen "rosarios" de gotas esféricas que se solidifican al enfriarse, formando perdigones. El diámetro de los orificios condiciona el de las gotas esféricas y, por consiguiente, el de los perdigones. En la base de la torre se recolectan los perdigones en un depósito con agua que amortigua los choques para evitar deformaciones y termina de enfriar el plomo.

La torre tiene que estar bien ventilada para evitar el excesivo calentamiento del ambiente, de ahí sus numerosas ventanas. La distancia de caída de los perdigones en su interior tiene que ser suficiente para asegurar la solidificación del plomo y además su enfriamiento hasta una temperatura inferior a la de ebullición del agua. De esta forma se evita la producción de vapor de agua cuando los perdigones entran en el recipiente de recogida, que aumentaría notablemente la temperatura ambiente.

El objeto de este ejercicio es la descripción simplificada de algunos de los aspectos físicos que gobiernan este antiguo procedimiento industrial. En la "Tabla de datos" al final de este enunciado se encuentran los valores de las magnitudes necesarias para la resolución numérica de los siguientes apartados.

a) Determine y calcule la energía (calor), Q, que un perdigón de plomo del nº 6, inicialmente liquido a la temperatura de fusión del plomo, T_{i}, tiene que transferir al aire del interior de la torre para que, durante su caída, se solidifique y se enfríe hasta la temperatura de ebullición del agua T_{f}.

En adelante admitiremos, por simplicidad, que las gotas esféricas de plomo fundido se forman prácticamente a la salida del depósito de la parte superior de la torre y que inician su caída con velocidad nula.

Pero el movimiento de dichas gotas (de los perdigones) no es una caída libre ya que, además de su peso, actúa sobre ellas el empuje hidrostático, E, y la fuerza de resistencia (fricción), F_r, que ejerce el fluido en el que se mueven (aire). En el caso real que nos ocupa, la fuerza F_r es proporcional al cuadrado de la velocidad del perdigón, v. Su expresión para una esfera de radio R es

$$F_r = \frac{1}{4}\pi R^2 \rho_{\mathrm{a}} v^2$$

donde ρ_{a} es la densidad del aire.

b) Plantee la ecuación del movimiento del perdigón en su caída (2ª ley de Newton), y justifique que se puede despreciar el empuje hidrostático que actúa sobre el perdigón.

---

[1] Hoy en día, en la cámara superior de la torre sevillana existe una "cámara oscura" en la que puede verse una espectacular vista panorámica de la ciudad.

[2] Inestabilidad de Rayleigh.

La velocidad inicial de caída es nula, y por tanto la aceleración inicial es g. A partir de entonces, como la velocidad va aumentando, la aceleración va disminuyendo y tiende a alcanzarse una velocidad uniforme, conocida como *velocidad límite*.

c) Determine y calcule la velocidad límite de caída de los perdigones, v_L .

La energía (calor) que debe perder el perdigón durante su caída, Q, se transfiere al aire de la torre. De los tres procesos de transferencia de calor (convección, conducción y radiación) sólo tendremos en cuenta el de convección, que en este caso es dominante.

La potencia media transferida por convección del perdigón al aire viene dada por

$$\overline{P}_{\mathrm{c}} = 4\pi R^2 h\left(\overline{T} - T_{\mathrm{a}}\right)$$

donde T_{a} es la temperatura ambiente dentro de la torre, que supondremos constante. $\overline{T}$ es la temperatura media del perdigón durante la caída y h es el *coeficiente de transferencia de calor por convección*, dado por la relación empírica

$$h = \frac{0{,}185\,\kappa}{R}\left(\frac{2\overline{V}\,R\,\rho_{\mathrm{a}}}{\mu}\right)^{0,6}$$

En esta expresión, κ y μ son, respectivamente, la conductividad térmica y la viscosidad dinámica del aire, y $\overline{V}$ es la velocidad media de los perdigones.

Considere que los perdigones parten del reposo y alcanzan prácticamente la velocidad límite v_L antes de llegar al depósito de agua. Suponga que los valores de $\overline{V}$ y $\overline{T}$ son los respectivos promedios de los valores iniciales y finales, cuando los perdigones alcanzan el agua.

d) Calcule la potencia media disipada, $\overline{P}_{\mathrm{c}}$, en la caída de un perdigón del nº 6.

e) Determine y calcule la mínima altura H que han de caer los perdigones para que no se forme vapor de agua cuando llegan al depósito inferior.

TABLA DE DATOS	
Radio de los perdigones del nº 6	$R = 1{,}38$ mm
Calor latente de fusión del Pb	$L = 24{,}7\times10^3$ J/kg
Calor específico del Pb	$c = 1{,}28\times10^2$ J/(kg K)
Temperatura de fusión del Pb	$T_{\mathrm{i}} = 600\,\mathrm{K}$
Temperatura de ebullición del agua	$T_{\mathrm{f}} = 373\,\mathrm{K}$
Temperatura ambiente	$T_{\mathrm{a}} = 293\,\mathrm{K}$
Densidad del Pb	$\rho_{\mathrm{Pb}} = 1{,}13\times10^4\ \mathrm{kg/m^3}$
Densidad del Aire	$\rho_{\mathrm{a}} = 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$
Coeficiente de conductividad térmica del aire	$\kappa = 2{,}60\times10^{-2}$ W/(m·K)
Coeficiente de viscosidad del aire	$\mu = 1{,}80\times10^{-5}$ Pa·s
Aceleración de la gravedad	$g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

P1.-Solución

a) Para que un perdigón líquido de masa m y que se encuentra a la temperatura de fusión del Plomo (Pb) pase a sólido a la misma temperatura, debe perder (transferir al aire) una energía

$$Q_1 = m L$$

siendo L el calor latente de fusión del Pb.

Además, para que posteriormente se enfríe hasta la temperatura $T_f < T_i$ tendrá que ceder un calor

$$Q_2 = m c (T_i - T_f)$$

donde c es el calor específico del Pb.

En total, la cantidad de calor que deberá transferir es $Q = Q_1 + Q_2$,

$$Q = m L + m c (T_i - T_f)$$

Si el radio del perdigón es R y la densidad del Pb es ρ_{Pb}, resulta

$$\boxed{Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{Pb}[L + c(T_i - T_f)]} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 6,69 \text{ J}}$$

b) Cuando el perdigón de masa m inicia su caída en el interior de la torre, las fuerzas que actúan sobre él son su peso, el empuje hidrostático, E, y la fuerza de resistencia que ejerce el aire, F_r. Llamando a a la aceleración del perdigón, la ecuación del movimiento es

$$m a = m g - E - F_r$$

El peso del perdigón y el empuje hidrostático son, respectivamente,

$$mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{Pb} g \ , \qquad E = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g$$

por lo que, teniendo en cuenta la expresión de F_r dada en el enunciado, la ecuación queda

$$m a = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{Pb} - \rho_a) g - \frac{1}{4}\pi R^2 \rho_a v^2$$

Como $\rho_{Pb} >> \rho_{aire}$, el empuje puede despreciarse, y la ecuación del movimiento es

$$\boxed{m a = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{Pb} g - \frac{1}{4}\pi R^2 \rho_a v^2} \qquad (1)$$

c) De (1) resulta que la aceleración del perdigón en su movimiento de caída es

$$a = g - \frac{1}{4m}\pi R^2 \rho_a v^2$$

Como $m = 4\pi R^3 \rho_{Pb}/3$, resulta

$$a = g - \frac{3}{16}\frac{\rho_a}{\rho_{Pb} R} v^2 \qquad (2)$$

Si, como sugiere el enunciado, asumimos que en el comienzo de la caída la velocidad del perdigón es nula, de (2) se deduce que la aceleración inicial es g. Sin embargo, a medida que la velocidad aumenta la aceleración disminuye. Al cabo de un tiempo suficientemente largo, el segundo miembro de (2) tiende a anularse, y la velocidad de caída será constante (velocidad límite)

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_L = \sqrt{\frac{16 \rho_{Pb} R g}{3 \rho_a}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_L = 25,1 \text{ m/s}}$$

d) De acuerdo con el enunciado, las expresiones de la potencia que el perdigón transfiere al aire y el coeficiente de transferencia de calor por convección, son

$$\overline{P}_{\mathrm{c}} = 4\pi R^2\, h\left(\overline{T} - T_{\mathrm{a}}\right)$$

$$h = \frac{0{,}185\,\kappa}{R}\left(\frac{2\overline{V}\,R\,\rho_{\mathrm{a}}}{\mu}\right)^{0,6}$$

Según se indica en el enunciado, admitiremos que la temperatura y velocidad medias del perdigón son

$$\overline{T} = \frac{T_{\mathrm{i}} + T_{\mathrm{f}}}{2} \qquad \text{y} \qquad \overline{V} = \frac{0 + v_L}{2} = \frac{v_L}{2}$$

Por tanto la potencia media transferida por convección es

$$\overline{P}_{\mathrm{c}} = 0{,}370\,\pi\,\kappa\,R^{1,6}\left(T_{\mathrm{in}} + T_{\mathrm{fin}} - 2T_{\mathrm{a}}\right)\left(\frac{v_L\,\rho_{\mathrm{a}}}{\mu}\right)^{0,6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{P}_{\mathrm{c}} = 1{,}76\,\mathrm{W}}$$

e) Los perdigones deben solidificarse y enfriarse hasta T_{f}, como mínimo, antes de llegar al agua. Si Δt es el tiempo de caída de un perdigón, la potencia media que debe transferir al aire es $Q/\Delta t$, luego

$$\overline{P}_{\mathrm{c}} = \frac{Q}{\Delta t}$$

Si la altura de caída es *H*, se tiene que

$$\Delta t = \frac{H}{\overline{V}}$$

Por lo que

$$\overline{P}_{\mathrm{c}} = Q\frac{\overline{V}}{H}$$

De donde resulta

$$\boxed{H = \frac{Q}{\overline{P}_{\mathrm{c}}}\,\overline{V}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = 48\,\mathrm{m}}$$

Esta altura, a la que hay añadir la de las cámaras superior e inferior dentro de la torre, es muy acorde con la altura real de la torre de perdigones de Sevilla.

P1.- Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)	$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\mathrm{Pb}}[L + c(T_{\mathrm{i}} - T_{\mathrm{f}})]$	$Q = 6{,}69$ J	2+0,5
b)	$m a = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\mathrm{Pb}}\, g - \frac{1}{4}\pi R^2 \rho_{\mathrm{a}}\, v^2$ Como $\rho_{\mathrm{Pb}} >> \rho_{\mathrm{aire}}$ Empuje hidrostático despreciable		1+0,5
c)	$v_L = \sqrt{\frac{16\rho_{\mathrm{Pb}} R g}{3\rho_{\mathrm{a}}}}$	$v_L = 25{,}1$ m/s	1,5 +0,5
d)		$\overline{P}_{\mathrm{c}} = 1{,}76\,\mathrm{W}$	2
e)	$H = \frac{Q}{\overline{P}_{\mathrm{c}}}\,\overline{V}$	$H = 48\,\mathrm{m}$	1,5+0,5