P1 La física del Scalextric

El Scalextric es un juguete de coches de carreras cuyos orígenes se remontan al año 1952, cuando la compañía Minimodels comenzó a fabricar modelos en miniatura de coches de competición como Maserati o Ferrari. La escala en que se construían los modelos era muy variable, y cada coche se fabricaba con un tamaño diferente. Por este motivo a la gama de coches se la denominó ScaleX (palabra compuesta por "Scale" y "X", que significa “escala variable”, o “desconocida").

Fred Francis, dueño de Minimodels, tuvo la idea de motorizar los coches con un mecanismo de cuerda. El juguete tuvo tanto éxito que Minimodels decidió probar con motores eléctricos. A partir de entonces, ScaleX se convirtió en Scalextric (contracción de las palabras ScaleX y Electric). Para hacer carreras en pistas, se diseñaron unos carriles guía que tienen contactos eléctricos a ambos lados. Los coches avanzan por los carriles gracias a una fuente de alimentación de corriente continua conectada a cada uno de los dos raíles metálicos que tiene cada pista. Estos raíles se conectan al motor mediante dos *escobillas* situadas en la parte inferior del coche. Las escobillas son flexibles y deslizan sobre los raíles mientras los coches avanzan por la pista, transmitiendo la corriente eléctrica al motor.

La velocidad del coche se controla con un mando constituido por una resistencia eléctrica variable conectada en serie entre el motor del coche y la fuente de alimentación. Presionando el pulsador del mando se modifica su resistencia eléctrica, que varía entre un valor prácticamente nulo (cuando se empuja el pulsador a tope) y una resistencia máxima (cuando no se pulsa). El mando lleva incorporado un muelle que devuelve el pulsador a la posición de resistencia máxima cuando deja de empujarse. Variando la resistencia del mando se consigue que circule más o menos intensidad de corriente por el motor del coche, y así se puede controlar su velocidad en la pista.

Exploremos la física de un circuito de Scalextric como el de la figura 1, que consta de dos pistas horizontales A y B separadas una distancia d = 25 cm. Cada pista tiene dos tramos rectos paralelos S_1 y S_3, de longitud L = 5 m, y dos semicirculares S_2 y S_4 de radios R = 75 cm para la pista interior y ($R + d$) para la exterior. Dos coches de masa m = 125 g cada uno circulan uno en cada pista. Parten con velocidad nula de la meta y giran en sentido antihorario.

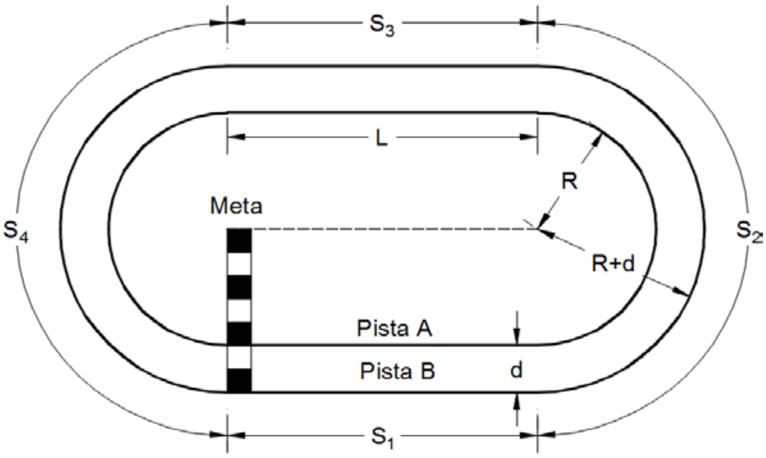


Fig. 1

En el movimiento del coche se disipa energía debido a una serie de factores que, en conjunto, se comportan como un rozamiento dinámico de coeficiente μ_d . En los tramos curvos los raíles pueden soportar una fuerza lateral máxima $F_{max} = 1{,}5\ \text{N}$, por encima de la cual los coches se salen del raíl. El cableado del motor del coche tiene una resistencia eléctrica $R_c = 5{,}0\ \Omega$. Para simplificar el problema, se supone que las únicas pérdidas de energía en el motor se deben a la resistencia de su cableado. El pulsador del mando controla una resistencia R_v , que varía de forma lineal con el recorrido del pulsador, entre 0 (pulsador a fondo) y $R_{max} = 400\ \Omega$ (pulsador suelto). La pista está alimentada con una fuente de tensión continua cuya FEM es $\varepsilon = 15$ V. En la figura 2 se muestra un esquema del circuito eléctrico formado por el motor del coche en serie con el mando y la fuente de alimentación. Se ha añadido un amperímetro para medir la intensidad de corriente que circula.

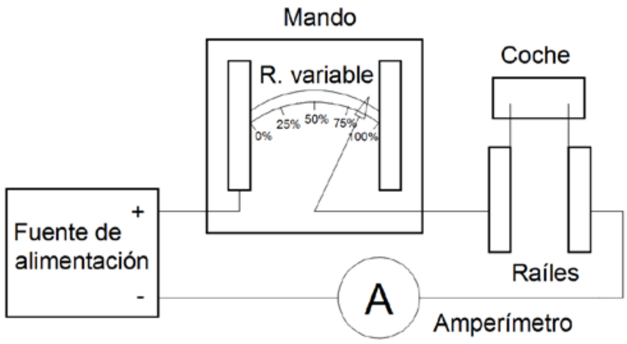


Fig. 2

a) Sabiendo que el motor no convierte energía eléctrica en mecánica cuando el pulsador del mando se deja suelto, calcule la lectura del amperímetro I_0 y la potencia que aporta la fuente de tensión P_{f0} .

b) ¡Comienza la carrera! Los jugadores pulsan a tope sus mandos y los coches comienzan a moverse por el tramo S_1 . Para simplificar el análisis[1] suponemos que la intensidad eléctrica en el circuito, tras pulsar los mandos, alcanza de forma casi instantánea un valor de 850 mA que se mantiene constante a lo largo del tramo S_1 . Determine la potencia eléctrica que el motor está convirtiendo en potencia mecánica para mover un coche.

c) Suponga que los coches aceleran desde el reposo hasta una velocidad máxima en un tiempo muy pequeño (despreciable) y que, después, su velocidad se mantiene constante. Si los coches tardan un tiempo $t_1 = 1{,}25\ \text{s}$ en recorrer el tramo S_1 , ¿cuál es el valor del coeficiente de rozamiento dinámico μ_d ?

d) Los coches entran en el sector S_2 . Calcule la velocidad máxima a la que puede circular el coche A en este sector para que no se salga en la curva.

e) Para que el coche A trace la curva del sector S_2 a la velocidad máxima, ¿en qué porcentaje P de su recorrido hay que pulsar el mando? Suponga que en la transición entre S_1 y S_2 tanto los cambios de velocidad como de energía cinética se producen en un tiempo muy pequeño. En S_2 el amperímetro sigue marcando 850 mA.

f) Dos amigos juegan con sendos coches idénticos, uno en la pista A y otro en la B. Antes de empezar a jugar discuten sobre cuál de los dos coches tiene ventaja. El piloto de la pista B argumenta que el A tiene ventaja porque recorre menos distancia en las curvas. El jugador de la pista A sostiene que el de la pista B recorre curvas con mayor radio y que, por tanto, en ellas el coche puede ir más rápido. Si ambos coches van en los sectores S_2 y S_4 a la velocidad máxima posible, calcule la diferencia entre los tiempos de ambos en las curvas y explique cuál de los dos tiene razón.

g) Con el objetivo de igualar los tiempos de los dos coches en las curvas, se modifica la pista B variando la fuerza máxima que pueden soportar los raíles sin que el coche descarrile. ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza máxima en el carril B?

---

[1] El tiempo que transcurre desde que arranca el motor parado hasta que éste alcanza una velocidad (constante) de “régimen” se denomina “período de puesta en marcha”. Suponemos que este tiempo es despreciable y que la velocidad de régimen se alcanza de forma prácticamente instantánea.

P1 Solución

a) Con el mando suelto la resistencia del mando es la máxima ($R_v = R_{max}$). Y con el motor parado, sin realizar conversión de energía eléctrica a mecánica como dice el enunciado, aplicando la ley de Ohm se tiene:

$$\varepsilon = I_0\left(R_c + R_{max}\right) \quad \rightarrow \quad I_0 = \frac{\varepsilon}{R_c + R_{max}} = 37{,}037 \cdot 10^{-3}\ \text{A} \ = \ 37{,}04\ \text{mA}$$

$$P_{f0} = \varepsilon I_0 \ = \ 0{,}56\ \text{W}$$

b) El mando está pulsado a tope y entonces $R_v = 0$. De la energía aportada por la fuente, una parte se disipa en la resistencia interna del cableado del motor, y el resto se comunica al motor, que la convierte en energía mecánica. Por lo tanto la potencia eléctrica que el motor convierte en mecánica es

$$P_{motor\text{-}S1} = \varepsilon I - I^2 R_c = \ 9{,}14\ \text{W}$$

---

* Nota: Este resultado es aproximado ya que la intensidad no es constante, pues parte de un valor máximo, justo tras pulsar el mando, hasta un valor mínimo estable cuando se alcanza la velocidad de régimen del motor. Sin embargo, este transitorio ocurre en un tiempo despreciable y la aproximación es buena.

c) En el tramo S_1 la energía aportada por el motor es igual al trabajo realizado por la fuerza efectiva de rozamiento. No hay que considerar aquí un término de variación de energía cinética porque, de acuerdo con las hipótesis simplificadoras del enunciado, el coche alcanza una velocidad constante en un tiempo muy pequeño y luego recorre a esa velocidad el tramo S_1. Por lo tanto se tiene

$$v_1 = L / t_1 = 4\ \text{m/s}$$

Del balance de energía resulta:

$$P_{motor\text{-}S1}\, t_1 = m\, g\, \mu_d\, L \quad \rightarrow \quad \mu_d = \frac{P_{motor\text{-}S1}\, t_1}{m\, g\, L} \ = 1{,}865$$

---

* Nota: Hemos supuesto por simplicidad que cada vez que pulsamos el mando el motor acelera en un tiempo despreciable hasta una velocidad de régimen constante. En realidad, para estos motores, dicha velocidad se alcanza en un tiempo muy pequeño pero no nulo. La solución exacta resulta de una ecuación diferencial para el balance de energía en un tiempo dt:

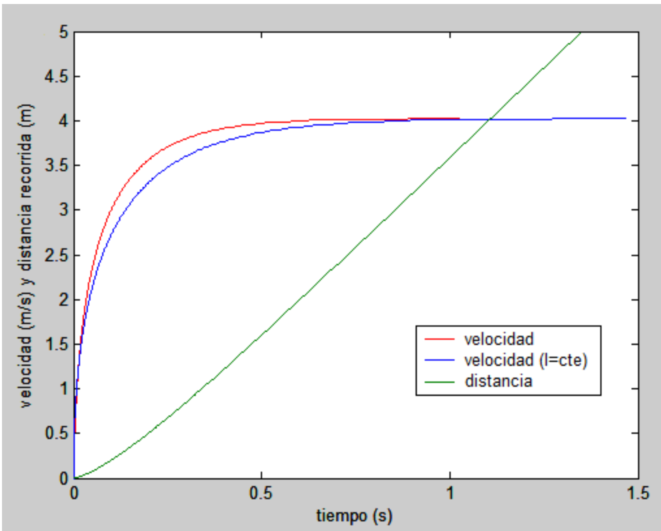
$$P_{motor}\, dt = dE_c + dW_{Fr} \quad \rightarrow \quad \left(\varepsilon I - I^2 R\right) dt = \frac{1}{2} 2 m v\, dv + m\, g\, \mu_d\, dx \quad \rightarrow \quad (\varepsilon - I\, R) I = m v v' + m\, g\, \mu_d\, v \qquad (1)$$

Se ha de tener en cuenta, además, que la intensidad que recorre el motor (debido a la fuerza "contraelectromotriz") depende de la velocidad: $I = \varepsilon / (R + kv)$, donde k es una constante que depende de las características del motor. Así:

$$m v' = \frac{k\varepsilon^2}{(R + kv)^2} - m\, g\, \mu_d \qquad (2)$$

La gráfica muestra la solución exacta $v(t)$ a la ecuación (2) y una solución aproximada a la ecuación (1) tomando el valor de la intensidad constante, para el coeficiente de rozamiento $\mu_d = 1{,}865$. También se representa la distancia recorrida en función del tiempo.

Comprobamos que las hipótesis son adecuadas, ya que la velocidad de régimen se alcanza rápidamente y el movimiento puede considerarse uniforme.



d) La velocidad máxima del coche A en el sector S_2 se alcanza cuando la fuerza centrípeta necesaria para trazar la curva es igual a la fuerza máxima que pueden soportar los raíles sin que el coche descarrile:

$$\frac{m v_{\text{A-S2}}^2}{R} = F_{max} \quad \rightarrow \quad v_{\text{A-S2}} = \sqrt{\frac{F_{max} R}{m}} \; = \; 3{,}0 \text{ m/s}$$

e) El coche tarda un tiempo

$$t_{\text{A-S2}} = \frac{(2\pi R)/2}{v_{\text{A-S2}}} = \frac{\pi R}{v_{\text{A-S2}}} = 0{,}7854 \text{ s}$$

en recorrer el sector S_2. Lógicamente en el tramo curvo S_2 el coche ha de circular a menor velocidad que en S_1 y, por tanto, ha de perder parte de su energía cinética justo antes de entrar en la curva. Esto implica que en S_2 el motor sólo tiene que convertir energía eléctrica en mecánica para compensar la pérdida energética debida al rozamiento dinámico, no siendo necesario invertir potencia mecánica en aumentar la energía cinética del coche.

Como la resistencia del mando varía linealmente con la profundidad con la que se introduce el pulsador, se tendrá que $R_v = (1-\alpha)R_{\max}$, donde $\alpha \in [0,1]$ es la fracción del mando que debe pulsarse. La potencia eléctrica que convierte el motor en eléctrica en este tramo es

$$P_{motor\text{-S2}} = \varepsilon I - I^2 \left(R_c + R_v\right) = \varepsilon I - I^2 \left(R_c + (1-\alpha)R_{\max}\right)$$

Podemos escribir el balance de energía como:

$$P_{motor\text{-S2}} \; t_{\text{A-S2}} = m\, g\, \mu_d \left(\frac{1}{2} 2\pi R\right)$$

Operando se obtiene $\alpha = 0{,}992$. Multiplicando por 100, hay que pulsar el mando P = 99,2% de su recorrido.

f) Ya se ha calculado antes la velocidad máxima del coche A en el tramo S_2 a velocidad máxima sin salirse de los raíles: $v_{\text{A-S2}} = 3 \text{ m/s}$. El tiempo que invierte el coche A en ese tramo era

$$t_{\text{A-S2}} = \frac{\pi R}{v_{\text{A-S2}}} = 0{,}7854 \text{ s}$$

Para el coche B la velocidad máxima y el tiempo empleado resultan

$$v_{\text{B-S2}} = \sqrt{\frac{F_{max}\left(R+d\right)}{m}} = 3{,}4641 \text{ m/s}$$

$$t_{\text{B-S2}} = \frac{\pi\left(R+d\right)}{v_{\text{B-S2}}} = 0{,}9069 \text{ s}$$

La diferencia de tiempos es $t_{\text{B-S2}} - t_{\text{A-S2}}$ = 0,12 s. Por tanto, el coche A tiene ventaja.

g) Llamando F'_{max} a la fuerza centrípeta que deben soportar los raíles de la pista exterior para que ambos coches corran en las mismas condiciones en la curva, debe cumplirse

$$\pi\sqrt{\frac{mR}{F_{max}}} = \pi\frac{\sqrt{m\left(R+d\right)}}{\sqrt{F'_{max}}} \quad \rightarrow \quad F'_{max} = \frac{R+d}{R} F_{max} \; = 2{,}0 \text{ N}$$