P1.- La escalinata de la catedral de Girona

A la catedral de Sta. María de Gracia de Girona se accede por una espléndida escalinata barroca del siglo XVII. El conjunto formado por las escaleras, la fachada de la catedral y los edificios que la rodean es de obligada visita turística y conforma un monumental espacio donde se celebran con frecuencia distintos eventos culturales y deportivos. El lugar ha servido incluso de escenario de películas y series de televisión como Juego de Tronos.

En este problema vamos a estudiar el movimiento de una pequeña pelota que cae rebotando escaleras abajo. ¿Quién no ha visto alguna vez el fenómeno? Si la pelota es muy elástica como las de ping-pong, los rebotes son cada vez más altos (cada uno medido desde su escalón) y cada rebote se salta más escalones. Pero si es de tipo plástico, rebota poco en cada escalón hasta que acaba rodando unos cuantos escalones más y se para. Entre estos dos extremos caben muchas posibilidades dependiendo del grado de elasticidad del choque con el suelo, de las dimensiones de los peldaños y de las condiciones iniciales (posición y velocidad de la pelota). Un caso especial consiste en que la pelota haga exactamente un rebote en cada escalón indefinidamente, como sugiere el esquema de la figura 1.

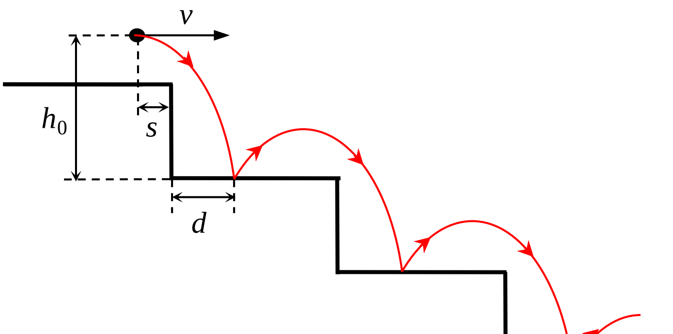

Fig. 1

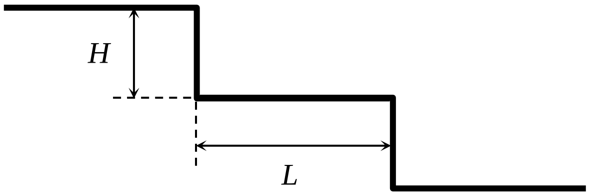

Fig. 2

La escalinata está compuesta por un total de 90 escalones distribuidos en tres tramos (el primero de 33 escalones, el intermedio de 28 y el último de 29) que están separados por dos rellanos. Cada escalón tiene una *huella* (anchura) L y una *contrahuella* o *tabica* (altura) H, como se indica[1] en la figura 2.

Por simplicidad, supondremos que las dimensiones de la pelota son despreciables frente a las de los escalones. Además, consideraremos que la componente horizontal de la velocidad de la pelota, v, no se modifica durante el vuelo entre sucesivos rebotes ni en los propios botes, es decir $v = \text{cte}$.

[1] Los escalones reales tienen un sobrevuelo sobre la tabica que, por simplicidad, no tendremos en cuenta.

Sin embargo, la componente vertical de la velocidad, u, cambia de sentido en cada bote y reduce su módulo en un factor ε, denominado *coeficiente de restitución*, que caracteriza la elasticidad del choque:

$$u_1 = -\varepsilon u_0 \qquad (1)$$

donde los subíndices 0 y 1 se refieren al instante inmediatamente anterior y posterior al bote, respectivamente.

1. Suelo plano

Antes de considerar la caída por la escalera, suponga que lanzamos la pelota desde una altura h_0 con velocidad horizontal v sobre un suelo plano (por ejemplo, uno de los rellanos de la escalinata).

Determine (en función de h_0, v, g y ε), respecto al suelo plano:

a) La altura h_1 que alcanzará la pelota después del primer bote y la altura h_n que alcanzará tras el enésimo rebote.

b) La distancia horizontal x_n recorrida entre el enésimo rebote y el siguiente.

2. Caída indefinida

Vamos ahora a estudiar las condiciones iniciales necesarias para que la pelota descienda por una escalera, supuesta infinita, para que haga exactamente un rebote en cada escalón indefinidamente (figura 1).

En los siguientes apartados, exprese sus resultados analíticos en función de L, H, ε y g. Para cálculos numéricos, considere L = 44 cm, H = 16 cm, ε = 3/4 y g = 9,8 m/s^2.

Determine analíticamente y calcule:

c) La altura inicial h_0 desde la que debe lanzarse horizontalmente la pelota.

d) La velocidad horizontal v con que debe lanzarse la pelota.

e) La distancia d entre el punto de impacto y la tabica de cada escalón cuando la pelota se lanza justo sobre el borde del primer escalón (s = 0).

3. Un tramo de la escalinata

Pasamos a considerar uno de los tramos de la escalera de la catedral de Girona, en concreto el primero de ellos, que tiene 33 escalones. Estudiamos el descenso de la pelota, con la condición anterior de un bote por escalón, desde el punto de lanzamiento hasta la altura máxima tras el primer rebote sobre el rellano inferior. Calcule:

f) El tiempo total, t_{total}, invertido en el descenso indicado.

g) La energía mecánica de la pelota disipada por unidad de masa, $\Delta E/m$, en el descenso indicado.

Los apartados c) a e) se referían a una escalera infinita, lo que requiere unas condiciones precisas de lanzamiento. La escalera que nos ocupa es finita, lo que admite cierta imprecisión o tolerancia. Supongamos s = 0 y que incrementamos la velocidad v calculada en el apartado d) en una cantidad Δv .

h) Determine el máximo aumento relativo que puede tener la velocidad inicial de lanzamiento, $\Delta v_{max} / v$, para que la pelota no se salte ningún peldaño en el descenso del tramo completo.

Por ambientar un poco el final del problema, nos introducimos en el mundo de ficción de Juego de Tronos. Uno de los personajes situados en el primer rellano golpea con el pie la pelota y ésta llega rodando por el suelo hasta el borde del primer escalón con la velocidad inicial v de los apartados anteriores.

i) Haga un dibujo aproximado de la trayectoria en el descenso por los primeros escalones.

P1.- SOLUCIÓN

1. Debe conservarse la energía mecánica, suma de cinética más potencial gravitatoria, tanto antes (descenso) como después (ascenso) del choque con el suelo:

$$\begin{cases} mgh_0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(u_0^2 + v^2) \\ mgh_1 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(u_1^2 + v^2) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2gh_0 = u_0^2 \\ 2gh_1 = u_1^2 \end{cases} \qquad (2)$$

a) Teniendo en cuenta la relación entre velocidades verticales antes y después del choque, dada en la ecuación (1) del enunciado, es inmediato obtener las alturas pedidas:

$$2gh_1 = u_1^2 = \varepsilon^2 u_0^2 = \varepsilon^2 2gh_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{h_1 = \varepsilon^2 h_0} \qquad (3)$$

Aplicando la misma idea al rebote enésimo, y a los anteriores:

$$h_n = \varepsilon^2 h_{n-1} = \varepsilon^2\left(\varepsilon^2 h_{n-2}\right) = \ldots = \left(\varepsilon^2\right)^n h_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{h_n = \varepsilon^{2n} h_0}$$

b) Entre bote y bote, la pelota sigue una trayectoria parabólica, composición de un movimiento horizontal con velocidad constante v y un movimiento vertical con aceleración constante g dirigida hacia abajo. De la ecuación (1) sabemos que las velocidades verticales de la pelota, en valor absoluto, justo antes, u_{n-1}, y justo después, u_n, del bote n cumplen:

$$u_n = \varepsilon u_{n-1} = \ldots = \varepsilon^n u_0$$

donde la velocidad vertical justo antes del primer bote, ecuación (2), es $u_0 = \sqrt{2gh_0}$

El alcance horizontal de una trayectoria parabólica es

$$x = \frac{2vu}{g}$$

donde v y u son las velocidades iniciales horizontal y vertical, respectivamente.

Por tanto, la distancia horizontal recorrida entre bote enésimo y el siguiente resulta:

$$x_n = \frac{2vu_n}{g} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_n = 2v\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,\varepsilon^n} \qquad (4)$$

2. La condición impuesta de descenso indefinido exige un movimiento periódico. Ello implica que: 1) la altura máxima alcanzada sobre un escalón tras el bote debe ser la misma para todos los botes, y 2) la pelota debe desplazarse en horizontal entre bote y bote una distancia igual a la huella de un escalón.

c) La pelota cae desde una altura h_0 sobre la huella de un escalón, bota y asciende hasta la altura h_1 dada en (3), respecto al nivel de ese escalón. Pero respecto al siguiente escalón, situado una distancia H por debajo, la altura debe ser h_0. Por tanto, debe cumplirse:

$$h_0 = h_1 + H = \varepsilon^2 h_0 + H \quad \rightarrow \quad \boxed{h_0 = \frac{H}{1-\varepsilon^2}}, \qquad \boxed{h_0 = 36{,}6 \text{ cm}}$$

d) Como el movimiento es periódico, el desplazamiento horizontal entre bote y bote es igual a la suma de la distancia horizontal recorrida en un descenso (desde h_0) y la distancia horizontal recorrida en un ascenso (hasta $h_0 - H$). Teniendo en cuenta que las trayectorias son parabólicas, estas distancias son:

$$x_d = \sqrt{\frac{2h_0 v^2}{g}} \,, \qquad x_a = \sqrt{\frac{2(h_0 - H)v^2}{g}} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon^2 h_0)v^2}{g}} = \varepsilon x_d$$

La suma de ambas debe coincidir exactamente con la anchura de la huella:

$$L = x_d + x_a = v\sqrt{\frac{2h_0}{g}}(1+\varepsilon) = v\sqrt{\frac{2H(1+\varepsilon)}{g(1-\varepsilon)}}$$

Por tanto, la velocidad con que debe lanzarse la pelota es

$$\boxed{v = L\sqrt{\frac{g(1-\varepsilon)}{2H(1+\varepsilon)}}}, \qquad \boxed{v = 0{,}92 \text{ m/s}}$$

e) Si la pelota se lanza sobre el borde del primer escalón (s = 0), la distancia d pedida es el desplazamiento horizontal de la pelota durante un descenso, es decir:

$$d = x_d = v\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = L\sqrt{\frac{g(1-\varepsilon)}{2H(1+\varepsilon)}}\sqrt{\frac{2H}{g(1-\varepsilon^2)}} \quad \to \quad \boxed{d = \frac{L}{1+\varepsilon}}, \qquad \boxed{d = 25{,}1 \text{ cm}}$$

Nota: Si $s \neq 0$ sigue ocurriendo el movimiento periódico descrito siempre que el lanzamiento se haga desde una posición inicial, tanto a la izquierda como a la derecha del borde del escalón, tal que $s \le L - d_{s=0} = 18{,}9 \text{ cm}$.

3. Descenso del tramo de 33 escalones.

f) Los puntos extremos del movimiento indicado delimitan un número entero de rebotes, 33, por lo que el tiempo pedido es el de 33 veces el tiempo de vuelo de cada uno. Pero es también el tiempo invertido en recorrer la distancia horizontal de 33 anchuras de escalón con la velocidad inicial v:

$$t_{\text{total}} = \frac{33L}{v} \quad \to \quad \boxed{t_{\text{total}} = 15{,}8 \text{ s}}$$

g) La velocidad de la pelota es la misma (velocidad vertical nula y velocidad horizontal v) en los puntos inicial y final del descenso descrito. Por tanto, la energía cinética no cambia. Sin embargo, entre esos mismos puntos la pelota desciende una altura 33H, de forma que la pérdida de energía potencial gravitatoria en todo el tramo es $33mgH$. La energía mecánica perdida, por unidad de masa, es

$$\Delta E / m = 33gH \,, \qquad \boxed{\Delta E / m = 51{,}7 \text{ J/kg}}$$

Al mismo resultado se llega considerando la pérdida de energía cinética en cada bote:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m u_0^2 - \frac{1}{2} m u_1^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 (1-\varepsilon^2) = mg h_0 (1-\varepsilon^2) = mgH$$

h) Al variar la velocidad horizontal, $v' = v \pm \Delta v$, la distancia d a la tabica de cada escalón ya no permanece constante, sino que va aumentando o disminuyendo paulatinamente y llegará un momento en que la pelota se saltará uno de los peldaños o bien dará dos botes en un mismo peldaño.

En los sucesivos rebotes, el punto de impacto en cada escalón se va desplazando hacia adelante o hacia atrás, respecto al anterior, una distancia

$$\Delta d = \pm \Delta v T$$

donde $T = L / v$ es el tiempo de vuelo entre bote y bote. El enunciado pregunta sólo por un aumento de la velocidad, aunque veremos que el resultado es el mismo si planteamos una disminución.

El máximo aumento de velocidad para que la pelota no se salte ningún escalón de los 33 que forman el tramo, corresponde a la situación en que ésta rebota justo en el borde del último peldaño tras recorrer en horizontal 32 huellas, es decir:

$$32\Delta d_{\max} = L - d$$

$$\Delta v_{\max} = \frac{\Delta d_{\max}}{T} = \frac{L-d}{32T} = \frac{L - L/(1+\varepsilon)}{32\,L/v} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta v_{\max}}{v} = \frac{1}{32}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \qquad \boxed{\frac{\Delta v_{\max}}{v} = 0{,}0134 \quad (1{,}34\%)}$$

De forma similar, la máxima disminución de la velocidad para que la pelota no llegue a rebotar dos veces en un mismo escalón vendrá impuesta por la condición:

$$32\,\Delta d_{\max} = s_{\max} = v\sqrt{\frac{2(h_0 - H)}{g}}$$

$$\Delta v_{\max} = \frac{\Delta d_{\max}}{T} = \frac{1}{32}\frac{1}{(1+\varepsilon)}\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\,v\sqrt{\frac{2(h_0-H)}{g}} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta v_{\max}}{v} = \frac{1}{32}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Nota: De gran interés es también estudiar la tolerancia a las condiciones iniciales de la altura, es decir, la variación máxima de h_0 para que la pelota no se salte escalones ni rebote más de una vez en ninguno.

i) Si proyectamos la trayectoria estudiada anteriormente ($h_0 = 36{,}6$ cm, d = 25,1 cm) sobre un escalón ficticio levantado 20,6 cm, podemos dibujar la nueva trayectoria cuando la pelota llega por el suelo (figura 3). Teniendo en cuenta que $h_1 = (3/4)^2 h_0$, el dibujo aproximado de la trayectoria nos lleva a concluir que la pelota dará 2 botes en la primera huella antes de caer al siguiente escalón. Como no se pide trayectoria exacta, se admiten soluciones aproximadas, a condición de que muestren alturas y distancias horizontales decrecientes, y más de un rebote en algún escalón. Cabe esperar que la altura decreciente tienda al valor h_0, lo que significaría que la sucesión de rebotes tendería asintóticamente a la condición propia de escalera infinita. Es un problema digno de atención, en general, y relativamente complicado por la discontinuidad impuesta por la escalera.

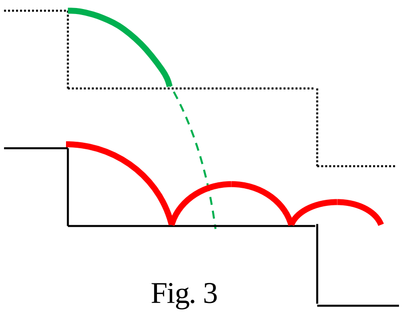

Fig. 3