P2. “Pesando” un *zapatero*.

Fig. 1

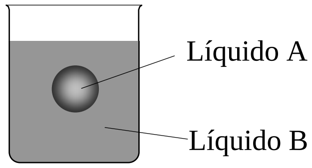

Fig. 2

Una definición elemental de líquido es: *Los líquidos, a diferencia de los sólidos, no tienen una forma definida: adoptan la del recipiente que los contiene*. Sin embargo, existen múltiples observaciones que contradicen lo anterior. Por ejemplo, si sobre una superficie horizontal de vidrio limpio se depositan pequeñas cantidades de mercurio se forman gotas, como se muestra en la figura 1, y es fácil observar que las más pequeñas son rigurosamente esféricas; a medida que aumenta su tamaño se “aplanan” pero sus bordes siempre están redondeados. Se pone de manifiesto que a la tendencia de los líquidos a adoptar la forma esférica a causa de *fuerzas superficiales* se opone la fuerza de gravedad que tiende a “aplanar” las gotas.

Otro ejemplo, cuando se introduce un líquido A en otro B que tenga la misma densidad pero que no sea miscible, el empuje de Arquímedes equilibra el peso, y el primer líquido A, que se encuentra en una condición de gravedad aparente nula, adopta una perfecta forma esférica. (Fig. 2).

Estos y otros muchos ejemplos ponen de manifiesto que los líquidos adoptan la forma esférica “cuando se les deja”; esto es, cuando las fuerzas superficiales de cohesión (*tensión superficial*) predominan sobre las fuerzas de gravedad, y esto ocurre cuando el número de moléculas que ocupan las superficie es del mismo orden que el de moléculas que forman parte del volumen del líquido. Esto hace que la “escala” de los fenómenos superficiales o capilares sea pequeña en la superficie de la Tierra, donde la gravedad es $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ aproximadamente.

El Análisis Dimensional nos proporciona la llamada *longitud capilar*, λ_c, que sirve para saber cuándo se deben considerar los efectos de la tensión superficial. Cuando una dimensión característica del problema sea mucho mayor que λ_c, podremos despreciar tranquilamente los efectos de dicha tensión superficial.

La longitud capilar viene dada por la siguiente expresión

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\, g}}$$

donde σ es la tensión superficial del líquido, ρ su densidad y g la aceleración de la gravedad

Si apretando lentamente un cuentagotas lleno de alcohol conseguimos que se desprendan gotas, observaremos que en promedio, su diámetro es de 2,5 mm y puede ser considerado como la longitud capilar de este fenómeno.

a) ¿Cuál sería el volumen V de la gota en un ambiente en el que existiese una gravedad residual $10^{-4} g_0$? El resultado que obtendrá es suficiente para justificar las viñetas de las figuras 3ª y 3b

Fig. 3a

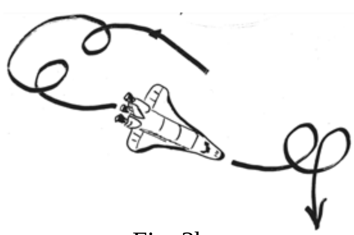

Fig. 3b

El significado de la tensión superficial es el siguiente: la superficie de los líquidos se comporta como una membrana. Una cama elástica es un símil que puede ayudar a comprender este concepto.

En la figura 4a se representa una cama elástica rectangular sujeta a un bastidor rígido. Su superficie es prácticamente plana y horizontal. La cama esta sometida a tensión, es decir el bastidor ejerce sobre la cama un conjunto de fuerzas como el representado en la figura 4a. En consecuencia, en cada lado de la cama, actúa una fuerza por unidad de longitud que denotamos por σ. Por lo tanto, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el lado AB de longitud L, vendrá dada por $F = \sigma L$

Fig. 4a

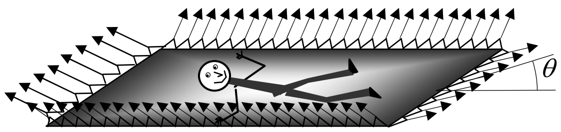

Fig. 4a

Naturalmente, si sobre la cama descansa un ciudadano, como se muestra en la figura 4b, la superficie deja de ser plana, presentará una concavidad en la región que está el ciudadano. Las fuerzas que sostienen la cama (las tensiones) cambiaran su dirección pero su módulo no variará apreciablemente.

Es importante observar que cuando la superficie de la cama es plana (Fig. 4a), la presión en la parte superior e inferior de ella es la misma: la atmosférica. Sin embargo, cuando la cama está cargada, en la parte inferior, la presión es la atmosférica, pero en la superior, en la parte cóncava, la presión es la atmosférica más la que ejerce el peso del ciudadano. Por lo tanto, la presión es mayor en la parte cóncava que en la convexa.

b) Suponga que la cama elástica es cuadrada de lado L, que la masa del ciudadano que está tumbado en ella es M, y que el ángulo que forman las tensiones con la horizontal es θ. Calcule la fuerza por unidad de longitud, σ.

Tras estas consideraciones, proponemos el siguiente experimento que fácilmente se puede realizar en casa. Consiste en depositar un alambre muy ligero sobre la superficie del agua contenida, por ejemplo, en un vaso como se muestra en la figura 5a. La longitud, l, del alambre debe ser de pocos milímetros y mucho mayor que su radio R.

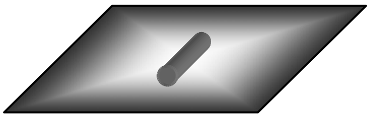

Fig. 5a

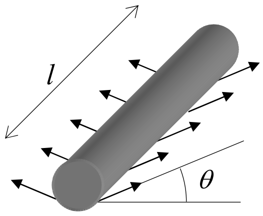

Fig. 5b

c) Cuando el alambre esté en equilibrio sobre la superficie, obtenga la expresión de su peso W en función de la tensión superficial σ, de la longitud l y del ángulo de contacto θ que forma la superficie con la horizontal. (Figura 5b).Ya que el radio del alambre es $R << 1$, se puede despreciar la acción de la tensión superficial en sus extremos.

El *gerris lacustris* es un insecto muy abundante en charcas, lagunas y en general en aguas dulces remansadas siendo su nombre vulgar *zapatero*. Estos animalejos "caminan" sobre el agua, no "nadan" en ella. Cuatro de sus seis patas terminan en una especie de pie en forma de cilindro que es el que se apoya horizontalmente sobre el agua, comportándose como el alambre del ejemplo anterior. Las dos patas delanteras la usa más como "manos" que como "pies". En una foto, como la de la figura 6, puede apreciarse uno sobre la superficie del agua, deformándola ligeramente en los apoyos, como si de una membrana se tratase.

Sobre la fotografía de la figura 6 se han indicado las dimensiones más relevantes del fenómeno: longitud de sus “pies”: $l = 3\,\mathrm{mm}$; anchura de la depresión que producen: $D = 1{,}5\,\mathrm{mm}$ y “profundidad” de la depresión: $h = 0{,}5\,\mathrm{mm}$.

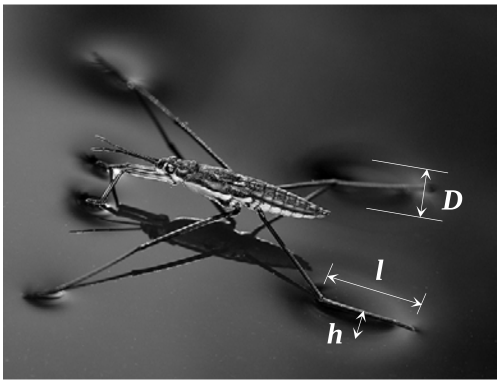

Fig. 6

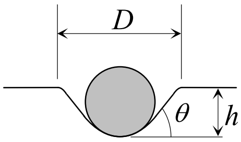

Fig. 7

d) Con las aproximaciones que crea convenientes, haga una estimación de la masa m del zapatero. Ayúdese de la figura 7 en la que se muestra el pie visto de frente y considere que la tensión superficial del agua es $\sigma = 7{,}28 \times 10^{-2}\ \mathrm{N/m}$.

Solución

a) De acuerdo con el enunciado, consideramos que en un ambiente en el que la aceleración de la gravedad es $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, la longitud característica (diámetro de la gota) del fenómeno de formación de una gota de alcohol (ginebra) es $\lambda_0 = 2{,}5\,\mathrm{mm}$, es decir

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\, g_0}} \qquad (1)$$

Es de esperar que la tensión superficial σ, al igual que la densidad ρ, es independiente de la gravedad, por lo tanto, cuando la gravedad sea g el nuevo diámetro de la gota vendrá dado por

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\, g}} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{g_0}{g}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2{,}5\sqrt{\frac{g_0}{10^{-4}\, g_0}} = 250\, mm$$

Por lo tanto el volumen de la gota esférica de ginebra en microgravedad es

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 8{,}2\cdot 10^{-3}\, m^3}$$

No cabe duda que 8,2 litros de ginebra justifican la viñeta de la figura 3 del enunciado.

b) En cada lado del cuadrado actuará la fuerza resultante de las tensiones, que forma un ángulo θ con la horizontal y cuyo módulo será

$$F = \sigma L$$

El peso del ciudadano estará equilibrado con las componentes perpendiculares de las fuerzas F que actúan en cada lado de la cala elástica cuadrada. Es decir

$$Mg = 4\sigma L \operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{Mg}{4L\operatorname{sen}\theta}}$$

c) Razonando de forma idéntica al anterior apartado, directamente se puede escribir

$$\boxed{W = 2\sigma\, l \operatorname{sen}\theta} \qquad (3)$$

d) Si ahora se trata de un “zapatero”, consideramos que su peso mg está equilibrado con las fuerzas debidas a la tensión superficial del agua que actuan en cada uno de los cuatro “pies” de sus patas ya que, como indica el enunciado, las delateras las utiliza más como “manos” que como “pies”, por lo tanto

$$mg = 4\sigma\, l \operatorname{sen}\theta \qquad (4)$$

Con referencia a la figura 7 del enunciado y teniendo en cuenta la pequeñez de los valores de D y h, se puede hacer una estimación aproximada del $\operatorname{sen}\theta$.

$$\text{Como} \quad \operatorname{tg}\theta \approx \frac{h}{D/2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2\mathrm{h}}{\sqrt{D^2 + 4\mathrm{h}^2}}$$

Y sustituyendo en (4)

$$\boxed{m = \frac{8\sigma\, l\, h}{g\sqrt{D^2 + 4h^2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 50\,\mathrm{mg}}$$