P2. El experimento de Cavendish.

Henry Cavendish (1731–1810) fue un notable físico y químico británico. Trabajó en prácticamente todas las áreas de la física de su tiempo, destacando particularmente en sus investigaciones sobre la electricidad y la determinación de parámetros de la Tierra. Concretamente, vamos a analizar su experimento para “pesar la Tierra”.

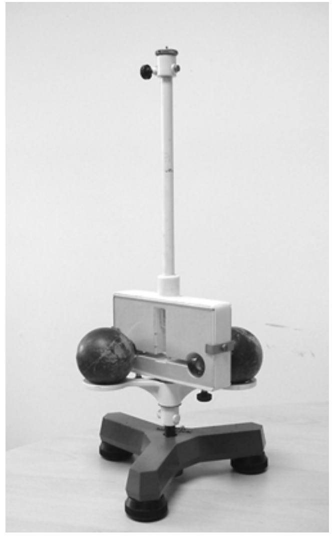

Fig. 1

Desde tiempos de Newton (1643-1727) se conocía que la fuerza gravitatoria era proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, pero se desconocían la constante de proporcionalidad y la masa de la Tierra. Cavendish, cuando realizó su famoso experimento, utilizó una *balanza de torsión* que previamente había diseñado y fabricado John Michell, que murió antes de poder probarla. La figura 1 es una fotografía de una moderna balanza de este tipo que se utiliza para realizar prácticas de laboratorio.

Una balanza de torsión consiste en una ligera varilla con dos esferas de masa m en sus extremos, que se mantiene horizontal cuando está suspendida por su punto medio O mediante un hilo sujeto por su extremo superior P, como se muestra en perspectiva en la figura 2. Supondremos que la semilongitud de la varilla es L y que su masa es despreciable frente a las de las esferas. En estas condiciones, cuando se aparta la varilla del equilibrio manteniéndola siempre horizontal y girándola un pequeño ángulo θ, las esferas tienden a describir un movimiento circular con velocidad angular $\omega = d\theta / dt$ y con radio L.

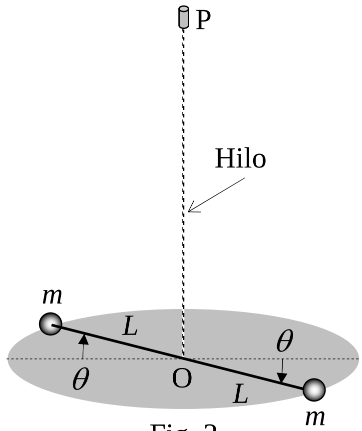

Fig. 2

a) Determine la expresión del módulo del momento angular L_0 de las dos esferas respecto al centro O de la varilla.

Al girar el sistema varilla-esferas el hilo del cual está suspendido se opone a que lo “retuerzan” ejerciendo un *momento de torsión*, τ, sobre la varilla cuyo valor es proporcional al ángulo girado θ, siempre que este ángulo sea muy pequeño. Es decir,

$$\tau = -k\theta$$

en donde k es la llamada *constante de torsión* del hilo y el signo tiene en cuenta la oposición del hilo al giro.

En definitiva, si tras apartar al sistema un pequeño ángulo θ respecto a la posición de equilibrio se deja libre, realizará oscilaciones armónicas[1].

b) Demuestre que el periodo de dichas oscilaciones armónicas viene dado por: $T = (8\pi^2 mL^2 / k)^{1/2}$

Si $m = 730{,}0\,\mathrm{g}$ y $L = 90{,}0\,\mathrm{cm}$ y se observa que el periodo de las oscilaciones es $T = 7{,}00\,\mathrm{min}$

c) Calcule el valor de la constante k de torsión del hilo.

A continuación, sobre cada esfera se aplican fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}' = -\vec{F}$ respectivamente, como se indica en la figura 3 en la que se muestra la balanza vista desde arriba. El sistema alcanzará un nuevo estado de equilibrio correspondiente a un pequeño ángulo θ_0, cuando el momento que ejercen dichas fuerzas se equilibre con el momento de torsión del hilo.

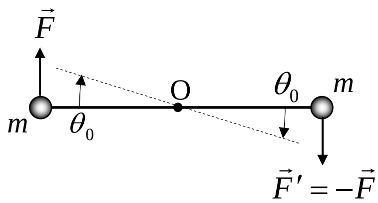

Fig. 3

d) Determine la expresión del módulo de la fuerza F aplicada en cada extremo, en función de L, k y θ_0.

---

[1] Recuerde que el momento respecto a un punto de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema viene dado por la variación temporal del momento angular respecto al mismo punto

En el experimento de Cavendish, la fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}' = -\vec{F}$ aplicadas en las bolas de masa m eran las correspondientes fuerzas de interacción gravitatoria, $\vec{F}_G$ que ejercían otras bolas de masa $M >> m$ colocadas a unas distancias b como se muestra en la figura 4.

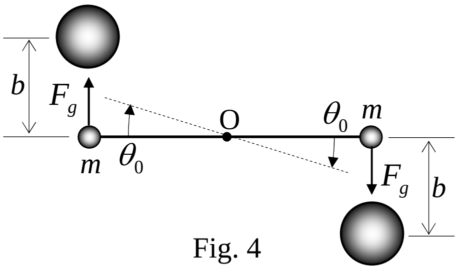

Fig. 4

e) Obtenga la expresión de la masa de la Tierra, M_T, en función de M, m, L, b, θ_0, del radio de la Tierra R_T y de la aceleración de la gravedad g.

Con los datos adicionales siguientes:

$$M = 158{,}0\,\text{kg}\,;\quad \theta_0 = 9{,}87\times10^{-4}\,\text{rad}\,;\quad b = 23{,}0\,\text{cm}\,;\quad R_T = 6{,}37\times10^{6}\,\text{m}\,;\quad g = 9{,}81\,\text{m/s}$$

f) Calcule la masa de la Tierra, M_T, y el valor de la constante de Gravitación Universal G.

Solución

a) Cuando al sistema varilla-bolas se aparta del equilibrio, los centros de las esferas describen trayectorias circulares idénticas de radio L, como se muestra en la figura 5. Si la velocidad angular es ω, el módulo de las velocidades lineales de cada bola es $v = \omega L$. El momento angular del sistema respecto a O es la suma de los momentos angulares de cada bola, es decir

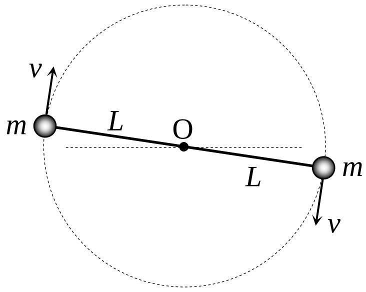

Fig. 5

$$L_0 = 2mLv \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_0 = 2mL^2\omega}$$

b) De acuerdo con la nota a pie de página del enunciado,

$$\frac{dL_0}{dt} = \tau \quad \Rightarrow \quad 2mL^2\frac{d\omega}{dt} = -k\,\theta \tag{1}$$

Como la aceleración angular es $\alpha = d\omega / dt$, de (1) resulta que

$$\alpha = -\frac{k}{2mL^2}\theta = -\Omega\,\theta \qquad \text{con} \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{2mL^2}}$$

Es decir, la aceleración angular α es proporcional (con signo menos) a la elongación angular θ, lo que significa que $\theta(t)$ es una función armónica con el tiempo, cuyo periodo viene dado por $T = 2\pi / \Omega$. Por lo tanto, tal como había que demostrar, el periodo es

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{8\pi^2 m L^2}{k}}}$$

c) Con los datos del enunciado, $m = 730{,}0\,\text{g}$, $L = 90{,}0\,\text{cm}$ y $T = 7{,}00\,\text{min}$, la constante k de torsión es

$$\boxed{k = 2{,}65\times 10^{-4}\ \text{Nm}}$$

d) De acuerdo con la figura 3, el módulo del momento resultante de las fuerzas que actúan sobre las bolas tiene que estar equilibrado con el momento de torsión. Esto es

$$2FL = k\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{k\theta_0}{2L}_{\,0}}$$

e) Ahora $F = F_G$ es la fuerza de interacción gravitatoria entre las bolas de masas M y m que se encuentran más próximas. Dado que dicha interacción es muy débil, es lógico despreciar la interacción entre las bolas grandes y las pequeñas más lejanas. Es decir

$$G\frac{M\,m}{b^2} = \frac{k\theta_0}{2L}_{\,0} \tag{2}$$

Aunque se supone que G no es conocida, si se sabe que la aceleración de la gravedad g viene dada por

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2} \tag{3}$$

donde M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra respectivamente. Eliminando G entre (2) y (3) y despejando M_T se obtiene

$$\boxed{M_T = \frac{2g\,R_T^2\,L\,M\,m}{k\,b^2\,\theta_0}}$$

f) Con los datos del enunciado,

$$\boxed{M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg}}$$

Por otra parte, conocida ya M_T, la constante de Gravitación Universal G puede deducirse de (3) y resulta ser

$$\boxed{G = 6{,}66 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2}$$