P2 El electrómetro monofilar de Wulf.

Con objeto de demostrar que la radiación en la superficie de la Tierra provenía de sustancias radiactivas existentes en el suelo, el sacerdote jesuita alemán Theodor Wulf diseñó y construyó un electrómetro de hilo que lleva su nombre. Con este instrumento, en 1910, quiso demostrar que la radiación debía disminuir con la altura. El resultado de la experiencia, realizada en la torre Eiffel, resultó negativo. La variación era pequeña pero en sentido contrario: aumentaba con la altura. Esto obligó a admitir la existencia de una radiación de origen externo que competía con la emanada de la propia Tierra. En 1912 el físico austriaco Victor Francis Hess, hizo mediciones ascendiendo en globo hasta los 5000 m: "La mejor explicación para los resultados de mis observaciones se basa en el supuesto de que una radiación de gran poder penetrante entra en nuestra atmósfera desde arriba". Posteriores medidas, realizadas desde globos no tripulados, le llevaron a la conclusión de que la intensidad de la radiación procedente del exterior (rayos cósmicos) aumenta con la altitud, varía con la latitud y es algo más intensa de día que de noche. Victor Hess, que puede considerarse el “padre” de los rayos cósmicos, recibió el Premio el Nobel de Física en 1936.

Los electrómetros son aparatos para medir diferencias de potencial o cargas eléctricas. Aunque existen diversos tipos, vamos a centrarnos en el electrómetro de Wulf de la figura 1, que se expone en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza y cuyo esquema se representa en la figura 2.

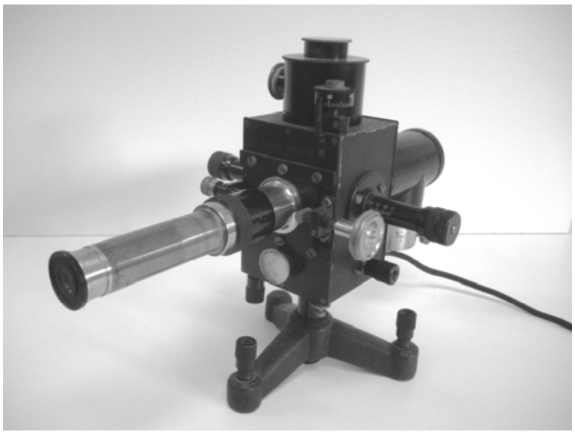

Fig. 1

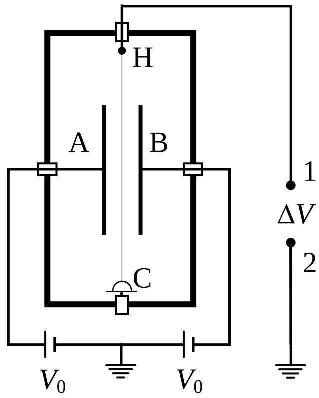

Fig. 2

En esencia, está constituido por una carcasa por cuyas caras laterales salen al exterior, perfectamente aislados, los soportes conductores de dos placas metálicas paralelas, A y B. Un fino hilo conductor HC tiene su extremo H conectado eléctricamente al borne 1 del aparato, y su extremo inferior está sujeto a la carcasa por medio de un bucle de cuarzo C, aislante, que permite regular la fuerza de tensión del hilo. El aparato dispone de un sistema lateral de iluminación, que permite observar el hilo con un microscopio dotado de un micrómetro. De esta forma es posible medir con gran precisión las pequeñas desviaciones laterales del hilo que se producen cuando entre los bornes 1 y 2 se aplica una diferencia de potencial ΔV .

Las placas A y B, separadas una distancia *d*, se conectan a dos baterías de fem V_0 cada una, como se indica en la figura 2. Por tanto, entre dichas placas se establece un campo eléctrico que, para simplificar el problema, puede considerarse uniforme. Si el hilo HC no está cargado no sufrirá ninguna fuerza electrostática, como se representa en la figura 3. Pero si existe una diferencia de potencial $\Delta V > 0$, el hilo adquirirá una carga $+q$ y tenderá a desplazarse lateralmente hacia la placa conductora negativa (figura 4) hasta que la fuerza electrostática esté compensada por las componentes horizontales de la fuerzas de tensión $\vec{T}$ en los extremos del hilo.

Dado que la carga *q* del hilo es extremadamente pequeña, también lo será el desplazamiento del hilo, $x << l$, lo que justifica la necesidad del microscopio. En consecuencia, el ángulo α que forma la tensión del hilo en sus extremos con la vertical será también muy pequeño ($\alpha \approx \operatorname{sen}\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$) y, por la misma razón, se puede considerar que el módulo *T* de la tensión se mantiene constante e independiente de *x*. Como simplificación adicional, puede suponerse que, en equilibrio, el hilo es prácticamente recto en el espacio comprendido entre las placas, como se representa en la figura 5.

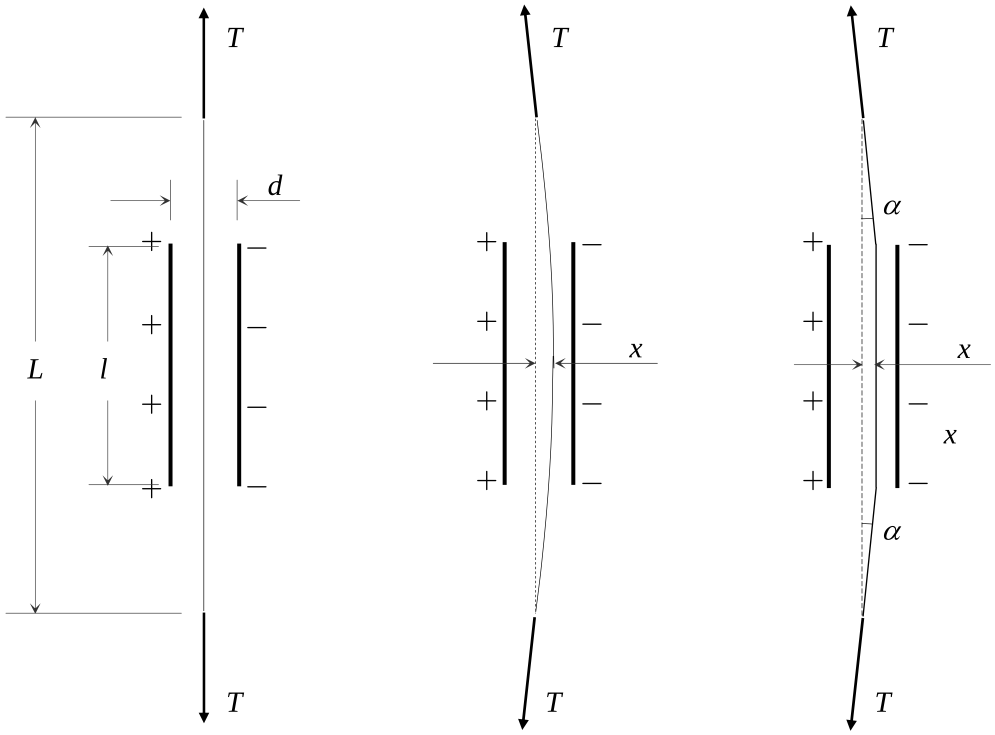

Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

a) Determine el módulo del campo eléctrico E existente entre las placas A y B, en función de V_0 y d.

Cuando entre los bornes 1 y 2 se establece la diferencia de potencial ΔV, el hilo adquiere una carga q que se reparte uniformemente por el hilo como una *densidad lineal* de carga $\lambda = q/L$. La parte del hilo comprendido entre las placas, cuya carga es λl, por efecto del campo eléctrico uniforme sufrirá un desplazamiento x, tal como se muestra en la figura 5.

b) Deduzca la expresión que relaciona el desplazamiento x del hilo, con de V_0, L, l, d, T y q.

Para modificar el rango de medidas puede modificarse la tensión T del hilo, aunque no es sencillo determinar su valor. Tampoco es fácil encontrar la relación entre la carga del hilo y la diferencia de potencial ΔV que se aplica entre los bornes del electrómetro. Sin embargo, para pequeños valores de x, la desviación del hilo y el voltaje aplicado ΔV son proporcionales, es decir $x = K\,\Delta V$. Suponga que, mediante una operación previa de calibrado, se sabe que la constante de proporcionalidad es $K = 5{,}59 \times 10^{-6}$ m/V.

En estas condiciones, como se muestra en la figura 6, se unen los bornes 1 y 2 del electrómetro, a través de un interruptor I, a las armaduras S y S´ de un condensador plano cargado. Las armaduras son circulares, de radio $r = 0{,}150$ m, y están separadas una distancia $b = 0{,}120$ m. Cuando se cierra el interruptor I, se observa en el electrómetro una desviación del hilo $x_1 = 0{,}139$ mm.

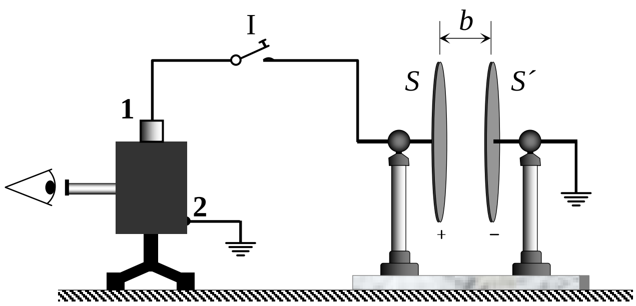

Fig. 6

c) Determine y calcule la diferencia de potencial ΔV_1 existente entre las armaduras del condensador, así como su carga Q_1. (Permitividad dieléctrica del aire: $\varepsilon = 8{,}86 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2 N^{-1} m^{-2}}$).

A partir del instante en que se cierra el interruptor I se observa que la desviación del hilo x_1 disminuye lentamente hasta anularse, lo que significa que la diferencia de potencial entre las placas del condensador disminuye con el mismo ritmo hasta hacerse cero. Si no existiese ningún tipo de corriente de fuga a través de los materiales aislantes del montaje, el fenómeno se debería exclusivamente a que algún tipo de radiación, suficientemente energética, ioniza las moléculas del gas (aire) existente entre las placas. Los iones positivos emigran a la placa negativa y los negativos a la positiva y, paulatinamente, se descarga el condensador.

d) Si el tiempo que transcurre desde que se acciona el interruptor hasta que $x_1 \approx 0$ es $\tau = 7{,}66 \times 10^3\ \mathrm{s}$, y suponiendo que la descarga del condensador se deba solo a ionizaciones simples del aire entre sus armaduras (cada molécula ionizada da lugar a un solo electrón y a un ion positivo), determine y calcule el número N de ionizaciones que se realizan por segundo y por cm^3 en el espacio comprendido entre las armaduras del condensador. (carga elemental $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$).

Solución

a) En la figura 7 se representan exclusivamente las conexiones de las placas del electrómetro con las dos baterías y la conexión a tierra, y es fácil ver que la diferencia de potencial entre ambas es $2V_0$. Dado que dichas placas constituyen un condensador plano, el módulo del campo eléctrico en su interior es

$$\boxed{E = \frac{2V_0}{d}}$$

b) Cuando el hilo tenga carga positiva, tenderá a desplazarse hacia la placa negativa, la B en nuestro caso. Aceptando la simplificación propuesta en el enunciado, consideremos como sistema mecánico en equilibrio la porción de hilo entre las placas (figura 8). Las fuerzas exteriores que actúan son las tensiones en sus extremos, de módulo *T*, y la fuerza electrostática *F* debida al campo eléctrico. Si λ es la densidad lineal de carga eléctrica del hilo, esta fuerza es

$$F = \lambda\, l\, E = \lambda\, l \frac{2V_0}{d} \qquad (1)$$

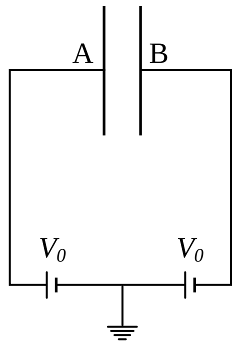

Fig. 7

En el equilibrio, la fuerza resultante horizontal debe ser nula, por lo que

$$F - 2T \operatorname{sen}\alpha = 0 \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta el pequeño valor de α,

$$\operatorname{sen}\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$$

De la figura 5 del enunciado es fácil deducir que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{(L-l)/2}$$

De donde,

$$\lambda\, l \frac{2V_0}{d} = 2T \frac{2x}{L-l} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{(L-l)\,l}{d} \frac{\lambda V_0}{2T}$$

Y como $\lambda = q/L$, resulta

$$\boxed{x = \frac{(L-l)\,l}{Ld} \frac{V_0}{2T} q} \qquad (3)$$

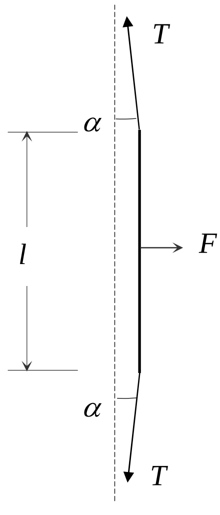

Fig. 8

c) Al conectar las armaduras del condensador a los bornes del electrómetro se observa una desviación del hilo $x_1 = 0{,}139\ \text{mm}$, luego, teniendo en cuenta el valor de la constante de calibración *K*, el voltaje es

$$\boxed{\Delta V = \frac{x_1}{K}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = 24{,}9\ \text{V}}$$

La capacidad del condensador plano viene dada por $C = \varepsilon\, A/b$, donde *A* es el área de las armaduras. Por consiguiente,

$$C = \varepsilon \frac{\pi r^2}{b}$$

Si la diferencia de potencial a la que se conecta es ΔV, el valor absoluto de la carga de cada una de sus armaduras será $Q = C\,\Delta V$, por lo que, en función de los parámetros del problema

$$\boxed{Q = \varepsilon \frac{\pi r^2}{b} \frac{x}{K}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 1{,}30 \times 10^{-10}\ \text{C}}$$

d) La carga de cada armadura se neutraliza al cabo del tiempo τ como consecuencia de las cargas de signo opuesto que le llegan procedentes de las ionizaciones que han tenido lugar en el aire existente entre las placas, cuyo volumen es $\pi r^2 b$. Por lo tanto, el número de ionizaciones que han tenido lugar por segundo y por unidad de volumen es

$$N = \frac{Q}{e\tau\pi r^2 b}$$

Teniendo en cuenta la expresión de Q,

$$\boxed{N = \frac{\varepsilon}{e\tau b^2}\frac{x}{K}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 12{,}5 \times 10^6 \text{ ionizaciones}/(\text{s} \times \text{m}^3)}$$