P2 El efecto Hall.

Una forma sencilla de comprobar la presencia de un campo magnético, y medirlo, se basa en el llamado efecto Hall. Dicho efecto fue descubierto por el físico estadounidense Edwin Herbert Hall en 1879, mientras trabajaba en su tesis doctoral en física bajo la dirección de Henry A. Rowland. Los experimentos de Hall demostraron que los portadores de carga en los materiales conductores eran partículas cargadas negativamente. Este hecho fue de gran relevancia en su tiempo, ya que los electrones no serían descubiertos hasta más de diez años después[1].

Para describir este efecto, consideremos un conductor en forma de cinta plana de dimensiones transversales a y b, como se muestra en la figura 1. Una corriente eléctrica, de intensidad I, fluye por la cinta en la dirección positiva del eje X y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ atraviesa la cinta en la dirección OY. Los portadores de carga, en este caso electrones de carga $q = -e$, se mueven con una velocidad media $\vec{v}$ en la dirección negativa de OX. En estas circunstancias la acción del campo magnético sobre los electrones tiende a acumularlos en el borde superior de la cinta, y en consecuencia, por defecto de electrones, en el borde inferior aparecerá una distribución de carga positiva. A medida que se producen estas distribuciones de carga, se establece un campo eléctrico, y por tanto una diferencia de potencial, entre los bordes de la cinta. Cuando se alcanza el equilibrio, la diferencia de potencial V_H entre los bornes A y B se denomina *Voltaje Hall* (o *fem Hall*).

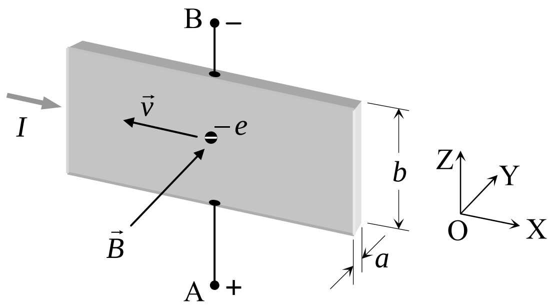

Fig. 1

a) Determine el voltaje Hall, V_{H}, en función de la dimensión b, del módulo del campo magnético, B, y del módulo de la velocidad media de los electrones en la cinta, v.

b) ¿Cómo se modificaría el Voltaje Hall anterior si la cinta fuese de un material semiconductor y la corriente I se debiese a portadores con carga positiva $q = +e$?

c) Demuestre que la intensidad de corriente cumple $I = n\,q\,a\,b\,v$, donde n es el número de portadores de carga por unidad de volumen en el material de la cinta.

d) Teniendo en cuenta lo anterior, determine la expresión del Voltaje Hall, V_{H}, en función de n, I, q, B y de la anchura de la cinta, a.

e) Suponga que la cinta es de Cu, con $a = 2{,}0$ mm, $B = 0{,}40$ T e $I = 75{,}0$ A. Entre los bornes A y B se mide un voltaje Hall $V_{\mathrm{H}} = 0{,}81\ \mu\mathrm{V}$. Sabiendo que $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, calcule el número de electrones por unidad de volumen[2], n.

Las aplicaciones más importantes del efecto Hall son la determinación del signo de los portadores mayoritarios, el cálculo del número de portadores por unidad de volumen y la medida de campos magnéticos mediante las llamadas *sondas Hall*. Básicamente estas sondas son como la de la figura 1, normalmente hechas con material semiconductor, y con diferentes geometrías que se adaptan a la del campo magnético a medir.

Otro tipo de sonda, de geometría cilíndrica, para medir campos magnéticos en el interior de solenoides o bobinas largas, puede ser el que a continuación se plantea.

---

1 En 1895 el Dr. Hall fue nombrado profesor en Harvard, donde desarrolló el resto de su carrera. A pesar de sus descubrimientos, el Dr. Hall no obtuvo el Premio Nobel de Física. Sin embargo, un siglo después, el físico alemán Klaus von Klitzing recibió el Premio Nobel de Física por su trabajo sobre el efecto Hall cuántico.

2 Como es lógico, en este ejercicio no se tienen en cuenta efectos cuánticos e interacciones con la red cristalina. El resultado que se obtiene es aproximadamente un 25% mayor que el valor real.

La cinta se substituye por un tubo cilíndrico semiconductor de longitud L y radios r_1 y r_2, en el que se ha practicado una estrecha ranura o *gap*, como muestra la figura 2. Por la pieza conductora se hace circular una corriente I en sentido radial, de forma que los portadores de carga, con $q = +e$, se mueven desde la parte interior del cilindro hacia la parte exterior, como se muestra en el corte transversal de la figura 3. En toda la región existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido en paralelo al eje del tubo, como se indica en la figura 2, es decir perpendicular al papel y dirigido hacia adentro en la figura 3.

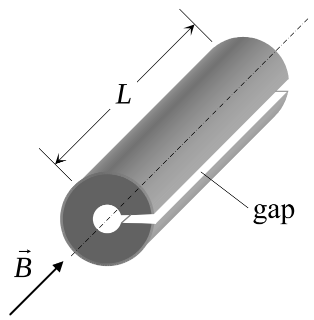

Fig. 2

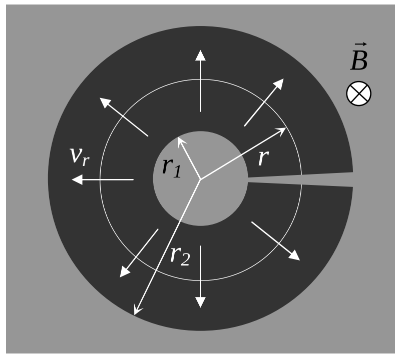

Fig. 3

f) Despreciando la existencia de la estrecha ranura, pero teniendo en cuenta que la intensidad de corriente I es la carga que atraviesa por unidad de tiempo, en este caso, una superficie cilíndrica de longitud L y radio r, ($r_1 < r < r_2$), obtenga la expresión de la velocidad radial de los portadores de carga, v_r, en un punto cualquiera del conductor, en función de r.

g) Determine el valor del módulo de la fuerza magnética que actúa sobre un portador de carga q que se encuentra a una distancia r del eje. Exprese el resultado en función de B, n, I, L y r.

Bajo la acción de dicha fuerza, los portadores se desplazarán e irán acumulándose sobre una de las caras de la ranura de la pieza cilíndrica hasta que, en equilibrio, estas partículas cargadas y su defecto de carga en la cara opuesta del gap creen un campo eléctrico $\vec{E}$, y por tanto una fuerza eléctrica que equilibre la fuerza debida al campo magnético.

h) Determine el módulo del campo eléctrico, E, en función de q, B, n, I, L y r.

El módulo del campo eléctrico sólo depende de r, lo que equivale a decir que dicho módulo es el mismo en todos los puntos de una circunferencia de radio r. Suponga despreciable la anchura de la ranura frente a la longitud $2\pi r$ de la circunferencia.

i) Determine el voltaje Hall, V_H, entre las superficies de la ranura del dispositivo.

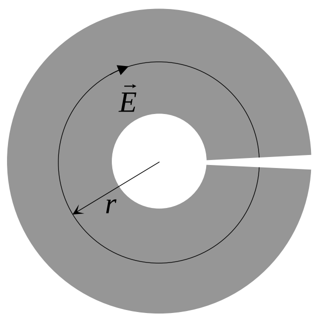

Fig. 4

Solución

a) Debido a la acción del campo magnético, sobre los portadores actúa la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Teniendo en cuenta las direcciones y sentidos del campo y de la velocidad indicados en la figura 1 y que los portadores son electrones de carga $q = -e$, la fuerza $\vec{F}_m$ estará dirigida en el sentido de OZ y su módulo será

$$F_m = e\,v\,B$$

Esta fuerza dará lugar a una distribución de carga negativa en la parte superior de la cinta mientras que, en la parte inferior, el defecto de electrones, creará una distribución positiva. En estas condiciones, se creará un campo eléctrico, $\vec{E}$, y se alcanzará un estado de equilibrio cuando la fuerza neta sobre los portadores sea nula, es decir, cuando se verifique

$$\vec{F}_m + (-e)\vec{E} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad E = v\,B$$

Como $\vec{B}$ es uniforme, $\vec{E}$ también lo será y , por tanto, el voltaje Hall resulta

$$V_\mathrm{H} = Eb \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_\mathrm{H} = v\,B\,b} \qquad (1)$$

b) Si la corriente fluye en el sentido positivo del eje OX y es debida a portadores de carga positiva, la velocidad de los portadores debe tener este mismo sentido. En consecuencia, la fuerza magnética tendería a llevarlos a la parte superior de la cinta. Por tanto,

$\boxed{\text{Cambiará la polaridad de los bornes A y B de la cinta.}}$

c) La intensidad *I* se debe al movimiento de los portadores de carga *q* con una velocidad media *v*. Esto significa que durante un pequeño intervalo de tiempo Δt, la sección transversal de la cinta es atravesada por la carga Δq contenida en un paralelepípedo de volumen $ab\Delta x$, donde Δx es la distancia que dichos portadores recorren en el tiempo Δt, (figura 5). Si *n* es el número de portadores por unidad de volumen, se tendrá que

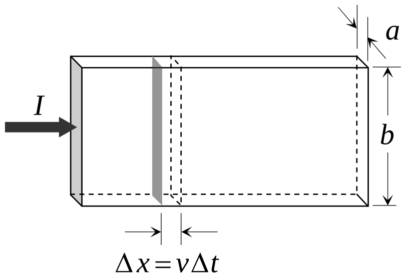

Fig. 5

$$\Delta q = q\,n\,a\,b\,\Delta x$$

Como $\Delta x = v\Delta t$

$$\Delta q = q\,n\,a\,b\,v\,\Delta t$$

Dividiendo ambos miembros por Δt y teniendo en cuenta que $I = \Delta q / \Delta t$, resulta

$$\boxed{I = q\,n\,a\,b\,v} \qquad (2)$$

Tal como se quería demostrar.

d) Eliminando *v* entre las expresiones (1) y (2) se tiene

$$\boxed{V_\mathrm{H} = \frac{I\,B}{n\,q\,a}} \qquad (3)$$

e) Despejando *n* de (3) y sustituyendo los valores numéricos del enunciado, se obtiene

$$\boxed{n = 1{,}16 \times 10^{29}\ \text{portadores}/\text{m}^3}$$

f) Salvo la geometría, este apartado es similar al c). Ahora los portadores se mueven con una velocidad radial v_r, y los portadores que en un instante *t* estén a una distancia *r* del eje del cilindro, al cabo de un breve intervalo de tiempo Δt habrán atravesado una superficie cilíndrica de área $2\pi r L$ y habrán recorrido una distancia $\Delta r = v_r \, \Delta t$ (figura 6, en la que, por simplicidad, no se ha dibujado la ranura).

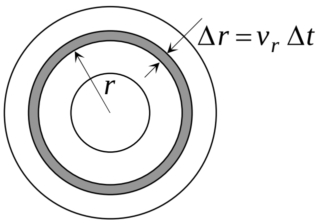

Fig. 6

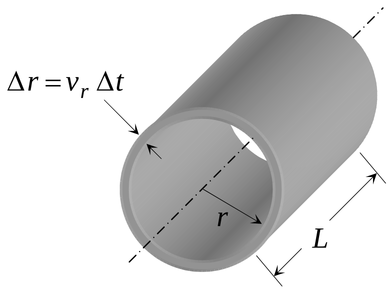

Fig. 7

En ese intervalo de tiempo, la carga Δq que ha atravesado la superficie cilíndrica es la contenida en el volumen $2\pi r \Delta r L$ (figura 7).

$$\Delta q = nq 2\pi r L v_r \Delta t \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nq 2\pi r L v_r$$

De donde la velocidad radial de los portadores es

$$\boxed{v_r = \frac{I}{2\pi n q L r}} \qquad (4)$$

g) Por ser $\vec{v}_r$ y $\vec{B}$ perpendiculares, el módulo de la fuerza de Lorentz es

$$F_m = q v_r B$$

Teniendo en cuenta (4), resulta

$$\boxed{F_m = \frac{I B}{2\pi n L r}} \qquad (5)$$

h) De forma análoga al apartado (a), se establece el equilibrio con un campo eléctrico que verifique $\vec{F} + q\vec{E} = \vec{0}$. Pero ahora las líneas del campo $\vec{E}$ son circulares en el sentido de las agujas del reloj, supuestos portadores positivos. Teniendo en cuenta (5), el módulo del campo eléctrico es

$$\boxed{E = \frac{I B}{2\pi q n L r}}$$

i) *E* es el mismo en todos los puntos de una línea de fuerza de radio *r*. Despreciando la anchura del gap, la tensión Hall V_H será

$$V_H = E \, 2\pi r = \frac{I B}{2\pi q n L r} 2\pi r \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_H = \frac{I B}{q n L}}$$