P2.- El escape de áncora.

Como es bien sabido desde hace tiempo, las oscilaciones de un péndulo son isócronas, por lo que son idóneas como referencia para la medida del tiempo en los relojes. Sin embargo, las oscilaciones de un péndulo real son siempre amortiguadas, pues siempre hay pérdidas energéticas que reducen paulatinamente su amplitud. Por lo tanto, su aplicación en un reloj requiere la incorporación de un dispositivo que suministre en cada oscilación una energía igual a la disipada, de forma que la amplitud de oscilación del péndulo sea constante. El *escape de áncora*, llamado así porque se asemeja al ancla (o áncora) de un barco, es un ingenioso mecanismo inventado hacia 1670 por el relojero londinense William Clement para conseguir este fin. El movimiento del péndulo mece la pieza llamada *áncora* de tal manera que traba y destraba sucesivos dientes de la *rueda de escape*, lo que a su vez permite que la rueda gire un ángulo preciso en cada oscilación. Los encuentros del áncora con la rueda de escape, al llegar el péndulo a los extremos de su recorrido, producen el tic-tac característico de estos relojes.

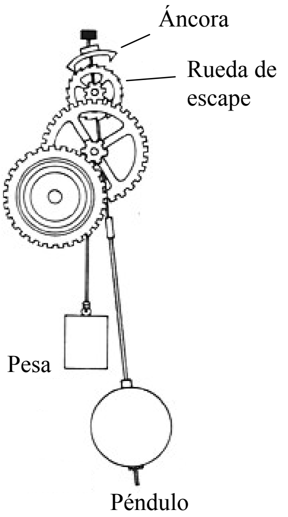

Fig. 1.a

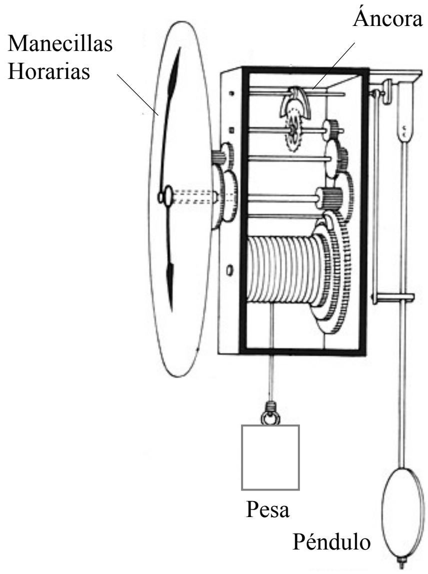

Fig. 1.b

En las figuras 1.a (vista frontal) y 1.b (vista semilateral) se representan los principales componentes de un reloj de péndulo:

El *péndulo***:** constituido por una masa (*lenteja*) situada en el extremo de una varilla metálica.

La *pesa*: masa que cuelga de un hilo enrollado en un cilindro giratorio, al que se conectan mediante engranajes multiplicadores las manecillas del reloj. La pesa desciende muy lentamente, haciendo girar los engranajes y las manecillas, y perdiendo energía potencial que, en parte, se transfiere al péndulo. Esta pesa es, por tanto, la "fuente de alimentación" energética del reloj.

El *escape de áncora* (figura 2): la rueda de escape está formada por una rueda dentada con dientes de tallado especial, conectada mediante los engranajes adecuados al eje de las manecillas y a la pesa. El áncora oscila solidariamente con el péndulo y sus extremos contactan con los dientes de la rueda de escape al final de cada semioscilación. El sistema cumple una doble función: por una parte controla la marcha del reloj dejando pasar un único diente de la rueda en cada oscilación completa del péndulo, de forma que el sistema gira el mismo ángulo en cada periodo; por otra, en cada contacto la rueda da un pequeño impulso al áncora, y por tanto al péndulo, para compensar el amortiguamiento y mantener constante la amplitud de sus oscilaciones.

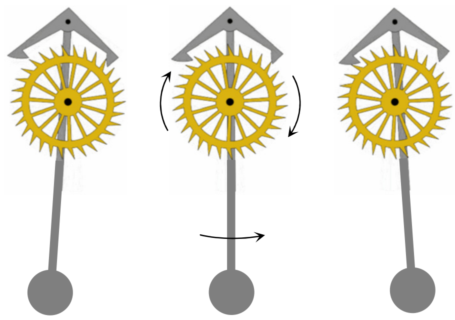

Fig. 2

En cada semioscilación, la rueda de escape se mantiene en contacto con el áncora durante un pequeño intervalo de tiempo, durante el que el sistema no gira. El resto del tiempo gira libremente, accionada por el descenso de la pesa, y con ella todo el sistema de engranajes y las propias manecillas del reloj.

De esta forma, la pesa desciende lentamente, a pequeños saltos siempre iguales. La energía potencial que pierde se transfiere al propio péndulo, para compensar la energía disipada en cada oscilación, y también al sistema de engranajes para compensar las perdidas por fricción.

a) El péndulo de un reloj, situado en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, realiza una semioscilación en 1 s (se dice que el péndulo *bate segundos*). Calcule la longitud L del péndulo simple equivalente, es decir que oscilaría con el mismo periodo.

b) Determine la energía mecánica del péndulo, E, en función de la amplitud angular de sus oscilaciones, $\theta_{\max}$, y de la longitud L y la masa M del péndulo.

c) Demuestre que, para pequeñas oscilaciones, la energía mecánica del péndulo es proporcional al cuadrado de la amplitud, es decir $E \propto \theta_{\max}^2$.

Ayuda: puede serle útil la relación trigonométrica $1 - \cos\alpha = 2\,\mathrm{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

d) Determine la potencia media disipada por fricción en todo el mecanismo, P, en función de la altura H que desciende la pesa durante un tiempo τ y de la masa m de la pesa. Calcule P cuando $H = 1{,}5\ \mathrm{m}$, $\tau = 1\ \text{semana}$ y $m = 0{,}25$ kg.

e) Calcule la relación r entre las velocidades angulares de la rueda de escape, ω_a, y de la aguja horaria del reloj, ω_h, suponiendo que el número de dientes de la rueda de escape es $N = 30$.

Suponga que al reloj se le retira la rueda de escape. La pesa ya no aportará energía al péndulo y, en consecuencia, sus oscilaciones tendrán una amplitud cada vez menor. Llamaremos γ a la fracción de energía que conserva el péndulo al cabo de una oscilación completa, es decir $E_1 = \gamma E_0$, donde E_0 y E_1 son las energías del péndulo al principio y al final de una oscilación, respectivamente.

f) Determine, en función de γ, el número de oscilaciones del péndulo hasta que su amplitud se reduce a la mitad de la inicial. Si $\gamma = 0{,}99$ y el péndulo bate segundos, calcule el tiempo que transcurre, $\tau_{1/2}$.

El cambio de L al variar la temperatura puede afectar apreciablemente al periodo de oscilación del péndulo de un reloj. Suponga que, para poder compensar este efecto, L es ajustable en pequeñas cantidades, δL. Llamando α al coeficiente de dilatación lineal de la varilla del péndulo, de longitud L_0,

g) Determine δL para mantener el periodo de oscilación si la temperatura aumenta δt.

Para conseguir que el periodo de las oscilaciones del péndulo de un reloj no dependa de la temperatura, se utilizan los *péndulos compensados*, según idea de J. Leroy en 1738. En la Figura 3 se representa un péndulo compensado, formado por cinco varillas verticales y dos barras horizontales AB y CD. El sistema oscila en torno al punto de suspensión O. Las varillas externas y central son de un metal de coeficiente de dilatación lineal α, y las varillas intermedias son de otro metal, de coeficiente de dilatación lineal β. La varilla central atraviesa la barra CD a través de un orificio, pudiendo deslizar libremente a través de él. L_1, L_2 y L_3 son las longitudes de las varillas a temperatura ambiente.

h) ¿Qué relación debe existir entre α y β para que el periodo de oscilación del péndulo sea independiente de la temperatura?

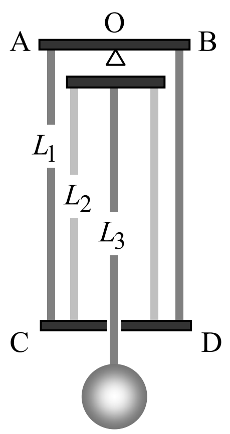

Fig. 3

Solución P2

a) El periodo de oscilación de un péndulo simple[1] es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Si el péndulo "bate segundos", $T = 2$ s. Por lo tanto

$$L = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{L = 0{,}994\ \text{m}}$$

b) El péndulo simple es un sistema conservativo. Tomando como nivel de referencia para la energía potencial gravitatoria la horizontal que pasa por el punto central de la oscilación, y considerando el instante en el que el desplazamiento angular es máximo (energía cinética nula), la energía mecánica coincide con la potencial, de forma que

$$\boxed{E = M\,g\,L\,(1-\cos\theta_{\text{max}})} \qquad (1)$$

c) La expresión (1) es válida para cualquier valor de θ_{max}, pero el péndulo oscila armónicamente con periodo independiente de la amplitud sólo cuando θ_{max} es pequeña.

En una primera aproximación, si para amplitudes pequeñas tomamos $\cos\theta_{\text{max}} \approx 1$, la expresión (1) nos da $E = 0$. Es preciso "refinar" la aproximación. Para ello se puede recurrir a un desarrollo en serie del coseno, o bien a la expresión trigonométrica dada en el enunciado:

$$1-\cos\theta_{\text{max}} = 2\,\text{sen}^2\,\frac{\theta_{\text{max}}}{2}$$

Como es bien sabido, para ángulos pequeños $\text{sen}\,\varepsilon \approx \varepsilon$, luego para pequeñas amplitudes se tiene que

$$1-\cos\theta_{\text{max}} \approx 2\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{2}\right)^2 = \frac{\theta_{\text{max}}^2}{2}$$

Por lo que la energía mecánica resulta ser, para pequeñas oscilaciones,

$$\boxed{E = \frac{1}{2}M\,g\,L\,\theta_{\text{max}}^2} \qquad (2)$$

Esta energía resulta proporcional al cuadrado de la amplitud, como se trataba de demostrar.

También se puede llegar a la misma conclusión sin recurrir a (1). Basta tener en cuenta que, para pequeñas oscilaciones, el comportamiento del péndulo es armónico y, por tanto, la elongación angular en función del tiempo, $\theta(t)$, viene dada por

$$\theta(t) = \theta_{\text{max}}\cos(\omega t + \varphi)$$

Donde tanto θ_{max} como φ son constantes del movimiento dependientes de las condiciones iniciales, y $\omega = 2\pi/T$.

La energía cinética es

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}M\,v^2 = \frac{1}{2}M\left(L\,\frac{\text{d}\theta}{\text{d}t}\right)^2$$

Derivando $\theta(t)$ respecto al tiempo y sustituyendo, resulta

[1] Realmente el sistema es un "péndulo físico" pero, lamentablemente, en los programas de enseñanza vigentes la Mecánica del Sólido Rígido está prácticamente eliminada.

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M L^2 \omega^2 \theta_{\max}^2 \,\text{sen}^2\left(\omega t + \varphi\right)$$

La energía mecánica, *E*, es igual a la energía cinética máxima, por lo que

$$E = \frac{1}{2} M L^2 \omega^2 \theta_{\max}^2 = \frac{1}{2} M g L \theta_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E \propto \theta_{\max}^2}$$

d) La pesa desciende una altura *H* con velocidad prácticamente nula, y toda su energía potencial inicial se disipa en las distintas partes del reloj. Si el tiempo de descenso es τ, la potencia media disipada es

$$\boxed{P = \frac{m g H}{\tau}}$$

Si $m = 0{,}25$ kg $H = 1{,}5$ m y $\tau = 1\,\text{semana} = 6{,}05 \times 10^5$ s, resulta

$$\boxed{P = 6{,}08 \times 10^{-6}\ \text{W}}$$

e) El péndulo efectúa una oscilación en un tiempo *T*, durante el que la rueda de escape gira el ángulo correspondiente a un diente, es decir $2\pi/N$ radianes, donde *N* es el número de dientes de dicha rueda. Por tanto, su velocidad angular media ω_a es

$$\omega_a = \frac{2\pi / N}{T}$$

Para $N = 30$ y $T = 2$ s, se obtiene

$$\omega_a = 0{,}105 \text{ rad/s}$$

Por otra parte, la aguja horaria tarda 12 horas en girar 2π radianes, luego su velocidad angular es

$$\omega_h = \frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60} = 1{,}45 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

La relación entre ambas velocidades angulares, resulta

$$\boxed{r = \frac{\omega_a}{\omega_h} = 720}$$

Esta es la relación de multiplicación que deben tener los engranajes entre el eje de la rueda de escape y el eje de las manecillas del reloj.

f) El péndulo inicia una primera oscilación con energía E_0. Al terminar esta oscilación la energía se ha reducido a $E_1 = \gamma E_0$. Ésta es la energía con que comienza la segunda oscilación, que termina con $E_2 = \gamma E_1 = \gamma^2 E_0$, y así sucesivamente. Tras la n-ésima oscilación, la energía será

$$E_n = \gamma^n E_0$$

Según (2), la energía del péndulo es proporcional al cuadrado de la amplitud, de forma que

$$(\theta_{\max})_n^2 = \gamma^n (\theta_{\max})_0^2 \qquad (3)$$

La incógnita es el número *n* de oscilaciones para que la amplitud se reduzca a la mitad de la inicial

$$(\theta_{\max})_n = \frac{1}{2} (\theta_{\max})_0$$

Llevando esta igualdad a (3) se deduce que $\gamma^n = 1/4$.

Finalmente, tomando logaritmos, el número de oscilaciones es

$$\boxed{n = -\frac{\ln 4}{\ln \gamma}}$$

Si $\gamma = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad n = 138$ oscilaciones

Como el periodo es $T = 2$ s, el tiempo que transcurre es

$$\boxed{\tau_{1/2} = 276 \text{ s}}$$

g) Si α es el coeficiente de dilatación lineal de una varilla de longitud L_0, el cambio de longitud δL debido a un cambio de temperatura δt viene dado por

$$\boxed{\delta L = \alpha\, L_0\, \delta t}$$

Si la temperatura ha aumentado δt, la longitud también aumenta, luego para mantener el periodo de oscilación debe disminuirse la longitud del péndulo en esta cantidad δL.

h) La dilatación de las varillas L_1 y L_3 debida a una variación δt hace descender la lenteja en la cantidad

$$\Delta L_1 + \Delta L_3 = \alpha\left(L_1 + L_3\right)\delta t \qquad (4)$$

Mientras que la dilatación de las varillas intermedias la hará ascender en

$$\Delta L_2 = \beta\, L_2\, \delta t \qquad (5)$$

Para que la longitud efectiva del péndulo no se modifique, el ascenso y el descenso deben ser iguales. Igualando (4) y (5), se obtiene

$$\boxed{\frac{\beta}{\alpha} = \frac{L_1 + L_3}{L_2}}$$

P2.- HOJA DE RESPUESTAS

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)		$L = 0{,}994\ \text{m}$	0,5
b)	$E = M\,g\,L(1-\cos\theta_{\max})$		1
c)	$E \approx \frac{1}{2} M\,g\,L\theta_{max}^2$		1,5
d)	$P = \frac{mg\,H}{\tau}$	$P = 6{,}08\times10^{-6}\ \text{W}$	0,75+0,25
e)		$r = \frac{\omega_a}{\omega_h} = 720$	1,5
f)	$n = -\frac{\ln 4}{\ln\gamma}$	$\tau_{1/2} = 276\ \text{s}$	1,5+1
g)	$\delta L = \alpha\,L_0\,\delta t$		0,5
h)	$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{L_1 + L_3}{L_2}$		1,5