P2 La luz láser

Cuando en 1917 Albert Einstein predijo el fenómeno de “emisión estimulada de radiación”, era difícil imaginar que décadas después se inventaría el *láser*[1] y que éste tendría revolucionarias aplicaciones en muy diversos campos como la medicina, la industria, el ocio, las comunicaciones… o la investigación científica. “Láser” es el acrónimo de las palabras inglesas *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* (amplificación de luz mediante emisión estimulada de radiación), que describen su funcionamiento.

La radiación láser posee todas las propiedades de la luz. Pero entonces, ¿qué la hace especial respecto a la luz emitida por otras fuentes? La respuesta es que la luz láser tiene una gran direccionalidad, una alta concentración energética, y una elevada monocromaticidad. Un “rayo” láser se presenta como un intenso haz casi cilíndrico de unos pocos milímetros de diámetro y muy poca divergencia, que contiene ondas de prácticamente una única frecuencia.

Estas extraordinarias características se deben a su propio principio de funcionamiento, que vamos a describir brevemente. Un láser típico consta de tres elementos básicos: 1) una *cavidad óptica resonante*, formada por dos espejos enfrentados, donde la luz viaja repetidamente en trayectos de ida y vuelta; 2) un material (sólido, líquido o gaseoso), llamado *medio activo*, que llena la cavidad entre los dos espejos y cuya función es amplificar la luz que viaja por él; y 3) un mecanismo de *bombeo* que aporta energía al medio activo para excitar sus átomos o moléculas a niveles energéticos superiores al fundamental.

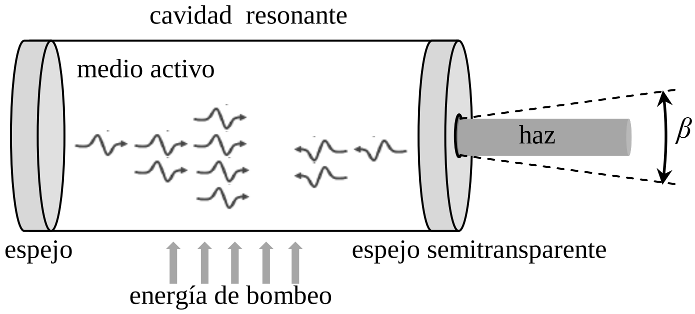

Fig. 1

El efecto amplificador del medio activo se debe a la *emisión estimulada* descubierta por Einstein, consistente en que los fotones emitidos espontáneamente por algunos de los átomos excitados inducen (estimulan) la emisión de fotones por otros átomos, con la peculiaridad de que la radiación estimulada tiene la misma frecuencia, fase y dirección que la radiación incidente estimuladora, de manera que ambas interfieren constructivamente.

Este proceso en cadena llevaría a que la intensidad de la luz amplificada dentro de la cavidad tendiera a infinito. Sin embargo, no ocurre así, pues se alcanza un equilibrio entre ganancias y pérdidas. Parte de las pérdidas se debe a que uno de los espejos de la cavidad es semitransparente y permite la salida de una fracción de la luz, que constituye precisamente el haz láser que emerge del dispositivo.

Dentro de la cavidad se produce la superposición de las ondas electromagnéticas que viajan en ambos sentidos. La distribución de la amplitud del campo eléctrico en la cavidad es del mismo tipo que la de las ondas estacionarias transversales en una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, como se esquematiza en la figura 2.

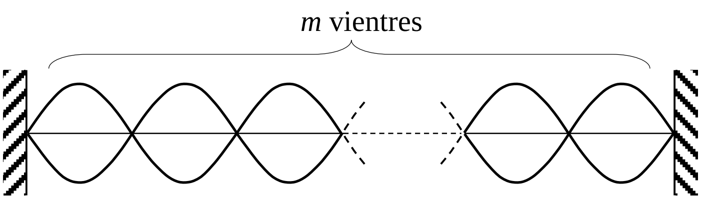

Fig. 2. Modo *m* de la cavidad

Si la cavidad tiene longitud L y está rellena de un medio activo de índice de refracción n:

a) Deduzca la relación entre las longitudes de onda de la luz dentro de la cavidad, λ, y en el vacío, λ_0.

b) Obtenga la expresión para la frecuencia, f_m, del modo m de la cavidad y la expresión para la separación en frecuencia, Δf, entre dos modos consecutivos.

[1] El primer láser fue construido en 1960 por Maiman utilizando rubí. Antes, en 1953, Townes, Gordon y Zeiger habían construido el primer máser, que funcionaba con los mismos principios físicos, para radiación de microondas.

Real Sociedad Española de Física R.S.E.F.
XXIX Olimpiada Española de Física
Universidad de Valladolid

Vamos a considerar un láser de Helio-Neón (He-Ne) cuya cavidad tiene una longitud $L = 44{,}0$ cm e índice de refracción $n = 1{,}000$. El espejo semitransparente tiene una reflectancia en energía del 95%. El láser emite luz con espectro centrado en una longitud de onda $\lambda_0 = 632{,}8$ nm con una potencia de salida de 10 mW, a través de un orificio de diámetro D_s = 2 mm. El haz viaja en el sentido positivo del eje OX. La velocidad de la luz en el vacío es $c = 2{,}998\times10^8$ m/s.

c) Suponiendo que el haz es perfectamente unidireccional, calcule su intensidad justo a la salida del láser y a una distancia de 10 m de la salida. Calcule también la intensidad, dentro de la cavidad, de la onda que viaja hacia el espejo de salida (se desprecia la absorción del medio de propagación).

En realidad, debido a la difracción de la luz en el orificio del láser se produce la divergencia del haz. Se sabe que el ángulo de divergencia β para un orificio circular (véase la figura 1) viene dado por la expresión:

$$\sin\frac{\beta}{2} = 1{,}22\frac{\lambda_0}{D_s} \qquad (1)$$

d) Obtenga el diámetro del haz $D(x)$ a una distancia x de la salida del láser, en función de D_s y λ_0. Tenga en cuenta que los ángulos de divergencia son muy pequeños. Calcule de nuevo la intensidad a 10 metros considerando la divergencia y que la energía luminosa se distribuye uniformemente en el haz.

La intensidad de una onda electromagnética y su amplitud de campo eléctrico se relacionan como:

$$I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 \qquad (2)$$

donde la permitividad del vacío es $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$.

e) Suponga que el haz láser es cilíndrico y monocromático. Escriba la ecuación de la onda armónica emitida, calculando el valor de las magnitudes implicadas.

Volvamos a la cavidad óptica resonante.

f) Calcule la frecuencia del modo fundamental de la cavidad, f_1, y la separación entre dos modos consecutivos, Δf, para los datos del láser del He-Ne. Dada λ_0, ¿cuál es el número de orden, *m*, del modo implicado?

La radiación producida en el medio activo no es absolutamente monocromática y presenta un espectro más o menos amplio. Ahora bien, la cavidad sólo puede amplificar luz dentro de un estrecho rango de frecuencias, definido por su *curva de ganancia* $\gamma(f)$, en la que γ es la ganancia y f la frecuencia de la luz. Las frecuencias para las que no se supera un cierto valor umbral de ganancia no son amplificadas, pues las pérdidas superan a las ganancias, y en la práctica no aparecen en la radiación emitida por el láser. La curva de ganancia típica es una función *lorentziana*, de la forma

$$\gamma(f) = \frac{1}{2\pi}\frac{w}{(f-f_0)^2 + (w/2)^2} \qquad (3)$$

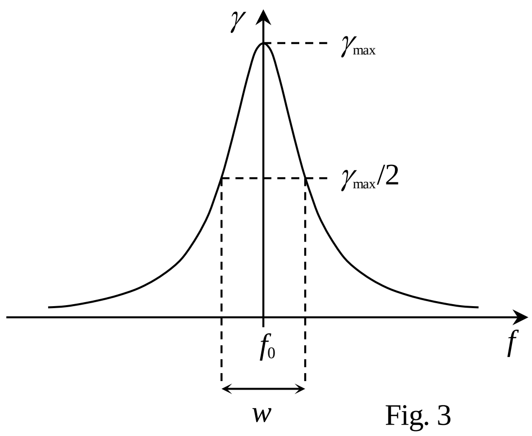

Fig. 3

donde, como es fácil comprobar, f_0 es la frecuencia para la que se alcanza la máxima ganancia, γ_{max}, y w es la anchura de la curva a mitad de su altura (véase la figura 3). Para nuestro láser de He-Ne, el máximo de la curva corresponde a la longitud de onda ya mencionada, $\lambda_0 = 632{,}8$ nm, y la anchura es $w = 341$ MHz.

g) Si sólo se amplifican eficientemente las frecuencias con ganancia γ superior al 10% de γ_{max}, ¿cuántos modos aparecerán en la luz emitida por el láser? (Por simplicidad, suponga que uno de los modos implicados está perfectamente centrado en la curva de ganancia.)

P2 Solución

a) Como es bien sabido, la longitud de onda, λ, la frecuencia, f, y la velocidad de propagación, v, de cualquier onda armónica cumplen

$$v = \lambda f \tag{4}$$

En particular, la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacío es $c = \lambda_0 f$, y en un medio material de índice de refracción n la velocidad es

$$v = \frac{c}{n} = \frac{\lambda_0 f}{n} \tag{5}$$

Comparando (4) y (5) se obtiene:

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}} \tag{6}$$

b) La condición de onda estacionaria en un espacio de longitud L, con nodos en los dos extremos, es

$$L = m\frac{\lambda}{2} \tag{7}$$

donde m es un número entero. Combinando esta ecuación con (6) y (5) y despejando la frecuencia se obtienen las posibles frecuencias, f_m , de los modos de la cavidad láser:

$$\boxed{f_m = m\frac{c}{2nL}} \tag{8}$$

Por tanto, la separación en frecuencia entre dos modos consecutivos, de órdenes m y $m+1$, es

$$\boxed{\Delta f = \frac{c}{2nL}} \tag{9}$$

c) La intensidad podemos calcularla como la potencia por unidad de área, siendo el área la del círculo que ocupa el haz a la salida, cuyo diámetro es $D_s = 2\ \text{mm}$. Por tanto, resulta:

$$I = \frac{P}{\pi (D_s / 2)^2} = \boxed{3{,}183\ \text{kW/m}^2} \tag{10}$$

Si el haz es perfectamente unidireccional, la sección del haz será la misma independientemente de la distancia recorrida por la luz. Así, la intensidad es la misma que en la salida: 3,183 kW/m^2

Debido al espejo semitransparente de reflectancia R = 0,95, la energía luminosa que atraviesa el espejo es una fracción $T = 1 - R$ = 0,05 de la que hay en el interior. Así:

$$I = (1-R)\, I_{\text{interior}} \quad \rightarrow \quad \boxed{I_{\text{interior}} = 63{,}66\ \text{kW/m}^2}$$

d) El diámetro a una distancia x de la salida del láser se obtiene como:

$$D(x) = D_s + 2\left(x \tan\frac{\beta}{2} \right) \tag{11}$$

Podemos comprobar que el ángulo de divergencia es muy pequeño:

$$\sin(\beta/2) = 1{,}22\,\lambda_0 / D_s \quad \rightarrow \quad \beta = 7{,}72\times 10^{-4}\ \text{rad} = 0{,}0442^{\circ}$$

Entonces podemos aproximar las razones trigonométricas: $\tan(\beta/2) \approx \sin(\beta/2) \approx \beta/2$. Así, con el ángulo de divergencia de (1), el diámetro en (11) resulta:

$$D(x) = D_s + 2{,}44\frac{\lambda_0}{D_s}x$$

El diámetro del haz a 10 m resulta: $D(x = 10\text{ m}) = 9{,}71\text{ mm}$

Finalmente, el valor de la intensidad en (10) disminuye a

$$I = 135{,}0\text{ W/m}^2$$

e) La ecuación de una onda electromagnética armónica, plana (pues suponemos el haz cilíndrico), con amplitud de campo eléctrico E_0, puede escribirse como

$$E(x,t) = E_0\cos(\omega t - kx) = E_0\cos\frac{2\pi}{\lambda_0}(ct - x)$$

donde $\omega = 2\pi f$ y $k = 2\pi/\lambda_0$, y la propagación es en el sentido positivo del eje OX.

Calculamos la amplitud del campo eléctrico con (2):

$$I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0{}^2 \quad \rightarrow \quad E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = 1{,}549\text{ kV/m}$$

Así, la variación del campo con el espacio y el tiempo es:

$$E(x,t) = 1{,}55\cos\left(2{,}98\times10^{15}\,t - 9{,}93\times10^{6}\,x\right)\ \text{kV/m}$$

f) Observando (8) y (9), se deduce que la frecuencia f_1 del modo fundamental, correspondiente a m = 1, coincide con Δf_m. Operando con los datos se obtiene

$$f_1 = \Delta f = 340{,}7\ \text{MHz} \qquad (12)$$

Para la longitud de onda λ_0 = 632,8 nm, a partir de (7) se deduce que

$$m = 2n\frac{L}{\lambda_0}$$

El resultado que aparece en la pantalla de la calculadora es 1 390 644,753. Pero se supone que m debe ser entero, por lo que es tentador redondear al entero más próximo y responder que el orden del modo implicado es m = 1 390 645. Sin embargo, este resultado numérico no tiene mucho sentido físico porque todos los datos están dados con cuatro cifras significativas. El resultado debe darse también con cuatro cifras significativas, (o como mucho con cinco, puesto que la primera cifra es un uno), es decir, la contestación más correcta es:

El número de orden del modo implicado es un entero próximo a $1{,}390\times10^6$

No es de extrañar que se obtenga un número tan grande, porque la longitud de la cavidad es muchísimo mayor que la longitud de onda de la luz.

g) Se trata de averiguar cuántos modos de la cavidad, correspondientes a una serie de valores de m consecutivos, caben dentro de la curva de ganancia en su zona central, donde γ es superior a $\gamma_{max}/10$.

La ganancia en el máximo, de acuerdo a (3) es

$$\gamma_{max} = \gamma(f_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{w}{(w/2)^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{w} \qquad (13)$$

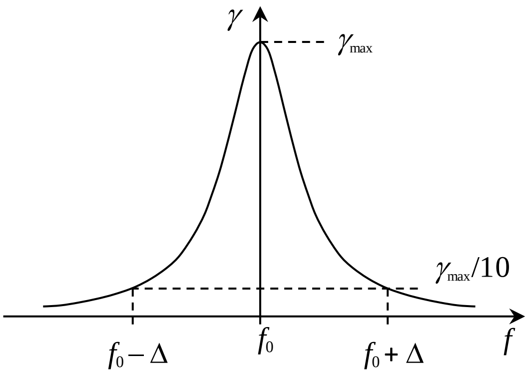

Fig. 4

Como es fácil comprobar, la curva es simétrica en torno a $f = f_0$, es decir $\gamma\left(f_0 - \Delta\right) = \gamma\left(f_0 + \Delta\right)$. La semianchura Δ de la zona de amplificación eficiente debe cumplir

$$\gamma\left(f_0 \pm \Delta\right) = \frac{\gamma_{\max}}{10} = \frac{1}{5\pi}\frac{1}{w} \qquad (14)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (3),

$$\gamma\left(f_0 \pm \Delta\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{w}{\Delta^2 + \left(w/2\right)^2} \qquad (15)$$

Igualando (14) y (15) y despejando Δ se obtiene

$$\Delta = \frac{3}{2}w$$

Con nuestros datos, la anchura del rango de frecuencias a cada lado de f_0 con amplificación eficiente es

$$\Delta = 511{,}5\ \text{MHz}$$

Teniendo en cuenta la simetría de la curva de ganancia y que uno de los modos está centrado en ella, en cada lado de la curva caben $\Delta / \Delta f$ modos, donde Δf era la separación de modos en (12). En nuestro caso

$$\frac{\Delta}{\Delta f} = 1{,}5$$

El número de modos debe ser entero, por lo que hay que redondear el resultado al entero inferior. Es decir, en cada ala de la curva cabe un modo. Añadiendo el central, obtenemos un total de tres modos. La situación se esquematiza en la figura 5, que está aproximadamente a escala en el eje de frecuencias.

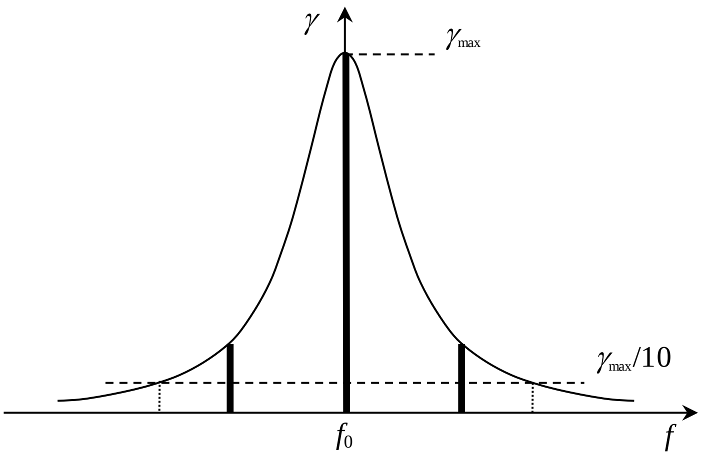

Fig. 5

* Nota: Cuando más de un modo se amplifica eficientemente, la luz emitida por el láser contiene radiación en un “peine” de frecuencias dentro de la curva de ganancia, y se dice que el láser es *multimodo*. Estos láseres se usan en aplicaciones donde interesa la alta potencia y no es necesaria la monocromaticidad.