

P2. Burbujas ascendentes

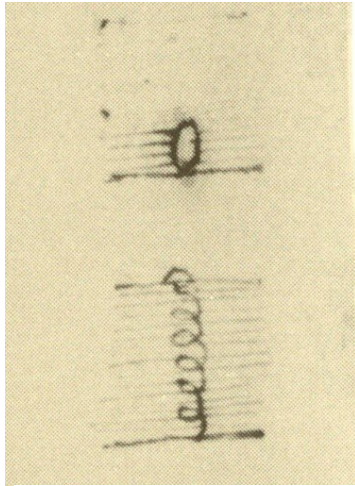


Ilustración de Leonardo del ascenso de burbujas en agua (en el Códice Leicester).

El movimiento de las burbujas de gas dentro de un fluido es un problema muy interesante en física que se ha estudiado desde el Renacimiento. Leonardo da Vinci ya observó hace cinco siglos que una burbuja de aire que asciende dentro del agua puede, o bien seguir una trayectoria vertical recta, o bien describir una oscilación horizontal y subir en zigzag, o incluso recorrer una espiral. Lo que Da Vinci señaló, y otros científicos han confirmado desde entonces, es que burbujas de aire con un radio mucho menor que un milímetro tienden a seguir un camino recto a través del agua, mientras que las burbujas más grandes realizan oscilaciones que dan como resultado trayectorias periódicas en zigzag o en espiral.

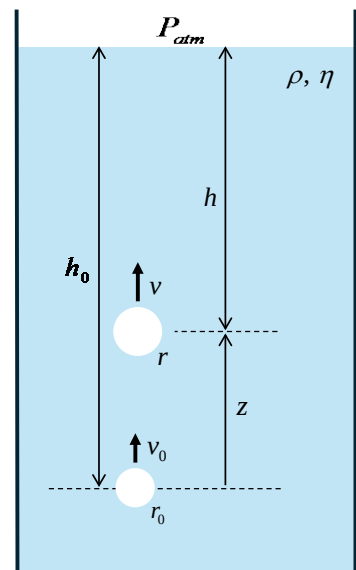
El análisis cuantitativo de este fenómeno es muy complejo, y actualmente es un tema de mecánica de fluidos en el que se sigue investigando. Además, en el ascenso de la burbuja en el fluido, aparte de su tamaño, intervienen muchos factores: el tipo de gas dentro de la burbuja, cuál es el fluido que la rodea, la velocidad de ascenso (que hace que el régimen del flujo sea laminar o turbulento), la temperatura y presión en el fluido, el cambio de la forma de la burbuja según asciende, etc.

En este problema vamos a estudiar con modelos sencillos cómo cambia el tamaño de una burbuja con la profundidad, así como su movimiento ascendente en el fluido.

Con un tubo capilar inyectamos una burbuja de aire de masa m muy pequeña dentro de un fluido de densidad ρ y viscosidad¹ η . Supondremos que la forma de la burbuja siempre es esférica. La burbuja se inyecta a una profundidad h_0 respecto de la superficie libre del fluido, y tiene inicialmente una velocidad v_0 y un radio r_0 . La presión en la superficie libre del fluido es la atmosférica, P_{atm} . El gas en el interior de la burbuja tiene densidad ρ_g , y suponemos que es un gas ideal. Supondremos que la temperatura del gas y del fluido es la misma y que tiene un valor constante.

Tamaño de la burbuja

El radio r de una burbuja depende de la *tensión superficial*² del fluido, γ , y de la diferencia de presión, ΔP , entre el interior y el exterior de la burbuja, cumpliéndose que $2\gamma = r\Delta P$. Por otro lado, según la ecuación fundamental de la hidrostática, la presión en un punto situado a profundidad h dentro de un fluido de densidad ρ es $P = P_{atm} + \rho gh$, siendo g la aceleración de la gravedad.



- a) Encuentre la expresión para la presión P_i en el interior de la burbuja, en función de las variables relevantes.

Tomamos como ejemplo el agua, de densidad $\rho = 997 \text{ kg/m}^3$, viscosidad $\eta = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ y tensión superficial $\gamma = 0,073 \text{ N/m}$. La presión atmosférica es $P_{atm} = 10^5 \text{ N/m}^2$. A una profundidad $h_0 = 5 \text{ m}$ inyectamos una burbuja que contiene $1,7 \cdot 10^{-7}$ moles de aire a 27°C de temperatura. Una vez soltada, la burbuja va ascendiendo. La constante de los gases ideales es $R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$.

¹ La viscosidad es una propiedad fundamental de los fluidos que describe su resistencia a fluir.

² La tensión superficial es el resultado de las fuerzas cohesivas entre las moléculas de un líquido. Es responsable, entre otras cosas, de que las burbujas tengan forma esférica. Tiene dimensiones de fuerza por unidad de longitud.

- b) Calcule el valor del radio r_0 de la burbuja inyectada. Para realizar este cálculo considere despreciable la contribución de la tensión superficial a la presión dentro de la burbuja. Una vez que tenga el valor de r_0 , justifique que era válida esa aproximación.
- c) Obtenga la expresión para el radio de la burbuja $r(h)$ cuando ha ascendido hasta una profundidad h . Calcule el valor del radio máximo $r_{\max}$ que alcanza la burbuja.

Con el objetivo de simplificar los cálculos, en el resto del problema vamos a suponer que el fluido está dentro de un tubo rígido cerrado y totalmente lleno, de manera que la presión en la parte superior ya no es la atmosférica, sino que es nula. El término de la tensión superficial será despreciable en todas las situaciones estudiadas.

- d) Obtenga de nuevo (para el tubo cerrado): la expresión del radio $r(h)$ de la burbuja a una profundidad h , el valor del radio r_0 y el valor del radio máximo $r_{\max}$. Tenga en cuenta que la burbuja más alta quedará a una altura $h = r_{\max}$.

Movimiento ascendente: trayectoria rectilínea

De acuerdo con el principio de Arquímedes, la burbuja experimenta una fuerza de empuje que le hace ascender. Al movimiento de ascenso se opone una fuerza de fricción que, para los radios r y las velocidades v de la burbuja involucrados en este problema, viene dada por la ecuación $F_r = \pi/5 \rho r^2 v^2$, donde ρ es la densidad del fluido. Únicamente consideraremos estas dos fuerzas, ya que al plantear la segunda ley de Newton podemos despreciar tanto el peso de la burbuja, mg , como el término de aceleración, ma , puesto que la masa es muy pequeña.

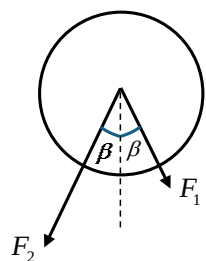
- e) Obtenga la expresión para la velocidad de ascenso de la burbuja, $v(h)$, a profundidad h , en función únicamente de h_0 y v_0 . (Utilice la expresión para $r(h)$ obtenida antes). Calcule el valor de v_0 .
- f) Obtenga la expresión para la energía disipada por el rozamiento entre h_0 y h .
- g) Obtenga la profundidad $h(t)$ de la burbuja en función del tiempo, y de h_0 y v_0 , a partir del resultado del apartado anterior. ¿Cuánto tiempo tardará la burbuja en llegar a la parte superior del tubo?

Cuando el radio y la velocidad de la burbuja superan un cierto valor, el flujo del fluido deja de ser laminar (movimiento ordenado en láminas paralelas que no se mezclan) y pasa a ser turbulento. Esta transición ocurre cuando el número de Reynolds, $N_R = 2\rho v r / \eta$, supera el valor de 2300.

- h) Calcule la profundidad $h_{L \rightarrow T}$ a la que el flujo de fluido alrededor de la burbuja deja de ser laminar.

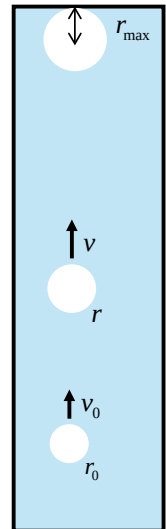
Trayectoria en zigzag

Cuando se rompe el flujo laminar se crean detrás de la burbuja una pareja de vórtices. La rotación de los vórtices provoca una disminución de la presión (depresión) que se traduce en una fuerza de tracción sobre la burbuja opuesta al movimiento. Cualquier perturbación que desplace la burbuja ligeramente hacia un lado, produce una asimetría en el flujo del fluido que intensifica el vórtice del lado contrario, donde se crea entonces una depresión mayor que tiende a devolver a la burbuja a la verticalidad. El proceso se repite y se produce el movimiento de zigzag.



Si x es la separación de la burbuja de la trayectoria vertical de equilibrio, modelamos las depresiones que crean los dos vórtices como $\Delta P_1 = \Delta P_{\text{vor}} (1 - x/b)$ y $\Delta P_2 = \Delta P_{\text{vor}} (1 + x/b)$, donde ΔP_{vor} es la depresión máxima que crea cada vórtice. El parámetro b da cuenta de la amplitud del zigzag. Suponemos que cada depresión genera una fuerza sobre una superficie efectiva S de la burbuja. Las fuerzas están orientadas a lo largo de direcciones que forman con el diámetro vertical de la burbuja un ángulo β constante.

- i) Obtenga el período T de oscilación de la burbuja en función de m , b , S , ΔP_{vor} y β .



P2. Burbujas ascendentes. SOLUCIÓN

- a) La presión P_i en el interior de la burbuja se obtiene a partir de la ecuación de la tensión superficial y de la presión del fluido, P_e , en el exterior de la burbuja:

$$\Delta P = P_i - P_e = \frac{2\gamma}{r} \rightarrow P_i = \frac{2\gamma}{r} + P_e$$

Por la ecuación de la hidrostática, la presión en el exterior de la burbuja es $P_e = P_{atm} + \rho g h$. Resulta:

$$P_i = \frac{2\gamma}{r} + P_{atm} + \rho g h$$

- b) Para un gas ideal se cumple: $P_i V = nRT$. El volumen de una esfera³ es $V = 4/3\pi r^3$. Por tanto, la presión del gas en el interior de la burbuja es

$$P_i = \frac{3nRT}{4\pi} \frac{1}{r^3}$$

Por otro lado, según el apartado anterior: $P_i \approx P_{atm} + \rho g h$ si despreciamos (como indica el enunciado) la contribución de la tensión superficial. Con los datos del problema, obtenemos como resultado para el radio:

$$r^3 = \frac{3nRT}{4\pi(P_{atm} + \rho g h)} = \frac{3 \cdot (1,7 \cdot 10^{-7}) \cdot 8,31 \cdot 300}{4\pi \cdot (10^5 + 997 \cdot 9,8 \cdot 5)} \rightarrow r_0 = 0,88 \text{ mm}$$

Para ese radio: $2\gamma / r = 2 \cdot 0,073 / 0,00088 = 165,9 \text{ N/m}^2$, que es mucho menor que las otras presiones, así que la aproximación era válida.

- c) El gas dentro de la burbuja experimenta un proceso de expansión isoterma: $PV = nRT = cte$. Por tanto:

$$PV = P_0 V_0 \rightarrow (P_{atm} + \rho g h) \frac{4}{3}\pi r^3 = (P_{atm} + \rho g h_0) \frac{4}{3}\pi r_0^3$$

Despejando, el radio de la burbuja a una profundidad h resulta

$$r(h) = \left(\frac{P_{atm} + \rho g h_0}{P_{atm} + \rho g h} \right)^{1/3} r_0$$

Vemos que la burbuja aumenta de tamaño al disminuir su profundidad en el líquido y acercarse a su superficie libre.

El radio máximo se alcanza cuando la burbuja alcanza la superficie libre del líquido:

$$r_{max} = r(h=0) = \left(1 + \frac{\rho g h_0}{P_{atm}} \right)^{1/3} r_0$$

Con los datos numéricos, resulta

$$r_{max} = \left(1 + 997 \cdot 9,8 \cdot 5 / 10^5 \right)^{1/3} \cdot 0,88 \rightarrow r_{max} = 1,00 \text{ mm}$$

- d) En el tubo cerrado, y totalmente lleno, ya no hay que considerar la presión atmosférica. El radio de la burbuja en función de la profundidad se obtiene esta vez de la igualdad

$$PV = P_0 V_0 \rightarrow \left(\frac{2\gamma}{r} + \rho g h \right) r^3 = \left(\frac{2\gamma}{r_0} + \rho g h_0 \right) r_0^3$$

Al despreciar los términos de la tensión superficial queda:

³ En realidad, las burbujas pueden cambiar de forma al ascender, pero no tendremos en cuenta este efecto.

$$\rho g h r^3 = \rho g h_0 r_0^3 \rightarrow r(h) = \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/3} r_0$$

Para calcular el radio máximo de la burbuja, cuando llega arriba del todo, tenemos en cuenta que se encontrará a una profundidad $h = r_{\max}$. La ecuación anterior seguirá siendo válida (no lo es cuando $h \rightarrow 0$). Obtenemos:

$$r_{\max} = \left(\frac{h_0}{r_{\max}} \right)^{1/3} r_0 \rightarrow r_{\max} = (h_0 r_0^3)^{1/4}$$

Con los datos numéricos, resulta para el radio inicial dentro del tubo cerrado:

$$r_0^3 = \frac{3nRT}{4\pi(0 + \rho g h_0)} = \frac{3 \cdot (1,7 \cdot 10^{-7}) \cdot 8,31 \cdot 300}{4\pi \cdot 997 \cdot 9,8 \cdot 5} \rightarrow r_0 = 1,27 \text{ mm}$$

Y para el radio máximo:

$$r_{\max} = (5 \cdot (1,27 \cdot 10^{-3})^3)^{1/4} \rightarrow r_{\max} = 10,1 \text{ mm}$$

Nota: Para los tamaños de burbuja estudiados en este problema, la presión debida a la tensión superficial es mucho menor que la presión hidrostática, incluso cuando la burbuja ha llegado a la parte superior del tubo ($h = r_{\max}$). Sin embargo, para burbujas minúsculas que estuvieran prácticamente pegadas a la parte superior del tubo ($h \rightarrow 0$), ocurriría que $2\gamma / r \gg \rho g h$. En este caso, se obtendría para el radio máximo:

$$\left(\frac{2\gamma}{r} + \cancel{\rho g h_0} \right) r^3 = \left(\frac{2\gamma}{\cancel{r_0}} + \rho g h_0 \right) r_0^3 \rightarrow 2\gamma r^2 \approx \rho g h_0 r_0^3 \rightarrow r_{\max} = \sqrt{\frac{\rho g}{2\gamma} h_0 r_0^3}$$

e) Por el principio de Arquímedes, la fuerza de empuje sobre la burbuja es

$$E = \rho V g = \frac{4}{3} \pi \rho g r^3$$

Al empuje se opone la fuerza de fricción: $F_r = \pi/5 \rho r^2 v^2$. La segunda ley de Newton es

$$ma = E - mg - F_r$$

Como la masa de la burbuja es muy pequeña, podemos despreciar ma y mg , de forma que⁴

$$E \approx F_r \rightarrow \frac{4}{3} \pi \rho g r^3 = \frac{1}{5} \pi \rho r^2 v^2 \rightarrow v^2 = \frac{20}{3} g r$$

Podemos poner el radio de la burbuja en función de la profundidad utilizando la expresión encontrada en el apartado anterior: $r(h) = (h_0 / h)^{1/3} r_0$. Y resulta la siguiente relación entre la velocidad de la burbuja y la profundidad:

$$v^2 = \frac{20g}{3} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/3} r_0 \rightarrow v(h) = \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/6} v_0$$

$$\text{donde } v_0 = \sqrt{\frac{20g r_0}{3}}.$$

El valor de la velocidad inicial, con los datos del problema y utilizando el valor de r_0 obtenido en el apartado anterior, es

$$v_0 = \sqrt{\frac{20g r_0}{3}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 9,8 \cdot 1,27 \cdot 10^{-3}}{3}} \rightarrow v_0 = 0,29 \text{ m/s}$$

Este resultado coincide con los valores típicos medidos experimentalmente para burbujas de aire en agua.

⁴ La burbuja alcanza en cada momento la velocidad límite, aunque ésta cambia con el tiempo.

Nota: En este problema no hemos utilizado la ley de Stokes, $F_r = 6\pi\eta r v$, para la fuerza de fricción ya que ésta sólo es válida si el número de Reynolds es menor que 1 (cuando dominan las fuerzas viscosas: rozamiento de unas capas de fluido sobre otras). Sin embargo, con los parámetros del problema (dadas la viscosidad y densidad del agua, y para la velocidad y el tamaño que tienen las burbujas) no se cumple esa condición y hay que utilizar la ecuación general de la fuerza de fricción para un cuerpo esférico: $F_r = \pi/2 C_a \rho r^2 v^2$. Para el rango de valores del número de Reynolds en este problema, el coeficiente aerodinámico es constante de valor $C_a \approx 2/5$.

- f) La energía disipada será el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento:

$$W = - \int_{h_0}^h F_r dz = - \int_{h_0}^h \frac{\pi}{5} \rho r^2 v^2 dz = - \int_{h_0}^h \frac{\pi}{5} \rho r^2 \frac{20}{3} g r (-dh) = \frac{4\pi\rho g}{3} \int_{h_0}^h r^3 dh = \frac{4\pi\rho g}{3} \int_{h_0}^h \frac{h_0}{h} r_0^3 dh = mgh_0 \int_{h_0}^h \frac{dh}{h}$$

Integrando:

$$W_{h \rightarrow h_0} = mgh_0 \ln \frac{h}{h_0}$$

- g) La velocidad obtenida antes nos da la variación de la posición en el eje Z (el vertical) respecto al tiempo. La coordenada z, medida desde el punto donde se inyecta a burbuja, se relaciona fácilmente con la profundidad: $z = h_0 - z$. Por tanto,

$$v = \frac{dz}{dt} = - \frac{dh}{dt} \rightarrow v(h) = \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/6} v_0 = - \frac{dh}{dt} \rightarrow h^{1/6} dh = -v_0 h_0^{1/6} dt$$

Integrando:

$$\int h^{1/6} dh = -v_0 h_0^{1/6} \int dt \rightarrow h^{7/6} = h_0^{7/6} - \frac{7}{6} v_0 h_0^{1/6} t \rightarrow h(t) = \left(1 - \frac{7 v_0}{6 h_0} t \right)^{6/7} h_0$$

De esta última ecuación ponemos a calcular el tiempo total que tarda la burbuja en ascender por el tubo ($h = r_{\max} \ll h_0$), sabiendo que $h_0 = 5$ m y conocida la velocidad inicial calculada antes, $v_0 = 0,29$ m/s. Resulta:

$$\frac{r_{\max}}{h_0} \approx 0 \rightarrow \left(1 - \frac{7 v_0}{6 h_0} t \right) = 0 \rightarrow t = \frac{6 h_0}{7 v_0} = \frac{6}{7} \frac{5}{0,29} \rightarrow t = 14,8 \text{ s}$$

- h) En la expresión del número de Reynolds introducimos la expresión de la velocidad en función del radio y la expresión del radio en función de la profundidad:

$$N_R = \frac{2\rho v r}{\eta} = \frac{2\rho}{\eta} \left(\frac{20gr}{3} \right)^{1/2} r = \frac{2\rho}{\eta} \sqrt{\frac{20g}{3}} r^{3/2} = \frac{2\rho}{\eta} \sqrt{\frac{20g}{3}} \frac{h_0}{h} r_0^3 \rightarrow h = \frac{80g\rho^2 h_0 r_0^3}{3\eta^2 N_R^2}$$

El flujo pasa de laminar a turbulento cuando $N_R \geq 2300$, lo que ocurre a una profundidad:

$$h_{L \rightarrow T} = \frac{80 \cdot 9,8 \cdot 997^2 \cdot 5 \cdot (1,27 \cdot 10^{-3})^3}{3 \cdot (10^{-3})^2 \cdot 2300^2} \rightarrow h_{L \rightarrow T} = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

- i) Escribimos, en módulo, las fuerzas de arrastre que crean los dos vórtices sobre la superficie efectiva S de la burbuja:

$$F_1 = S \Delta P_1 = S \Delta P_{\text{vor}} (1 - x/b), \quad F_2 = S \Delta P_2 = S \Delta P_{\text{vor}} (1 + x/b)$$

Nos interesa el movimiento lateral así que proyectamos las fuerzas sobre el eje X y planteamos la segunda ley de Newton:

$$F_{1x} - F_{2x} = ma_x \rightarrow F_1 \sin \beta - F_2 \sin \beta = S\Delta P_{vor} \sin \beta \left(1 - \frac{x}{b} - 1 - \frac{x}{b}\right) = -\frac{2S\Delta P_{vor} \sin \beta}{b} x = ma_x$$

$$x'' + \frac{2S\Delta P_{vor} \sin \beta}{mb} x = 0 \rightarrow x'' + \omega^2 x = 0$$

La ecuación resultante es la de un MAS (movimiento armónico simple) de frecuencia

$$\omega^2 = \frac{2S\Delta P_{vor} \sin \beta}{mb}$$

Por tanto, el período del movimiento horizontal de la burbuja que origina el zigzag es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mb}{2S\Delta P_{vor} \sin \beta}}$$

Cuanto más rápido asciende la burbuja, más rápido rotan los vórtices y más depresión crean detrás, produciendo un zigzag de mayor frecuencia.

Nota: En este caso hemos despreciado la fuerza de rozamiento ya que la velocidad v_x oscila continuamente en torno a 0 y nunca alcanza valores significativos. Un cálculo más exacto, incluyendo la fuerza de rozamiento, lleva a un movimiento oscilatorio amortiguado. En cualquier caso, el objetivo de este apartado es llegar a la conclusión de que existe un movimiento oscilatorio armónico en la dirección X que explica la trayectoria ascendente en zigzag.

Nota: Este fenómeno turbulento recibe el nombre de vórtices de Kármán, que también son responsables de otros efectos como, por ejemplo, el sonido por vibración de los tendidos eléctricos o los arabescos de las nubes bajas que atraviesan islas.

Nota: Recientemente, en enero de 2023, en un artículo científico en el que se han resuelto numéricamente las ecuaciones hidrodinámicas de Navier-Stokes mediante una novedosa técnica de discretización, se llegó a la conclusión de que la trayectoria recta de una burbuja de aire que asciende en agua se vuelve inestable debido a una perturbación periódica (una “bifurcación de Hopf”) que aparece, según las simulaciones, cuando el radio de la burbuja es mayor que un radio crítico de 0,926 mm, lo que está dentro de un margen de error de sólo el 2 % respecto del valor observado experimentalmente.