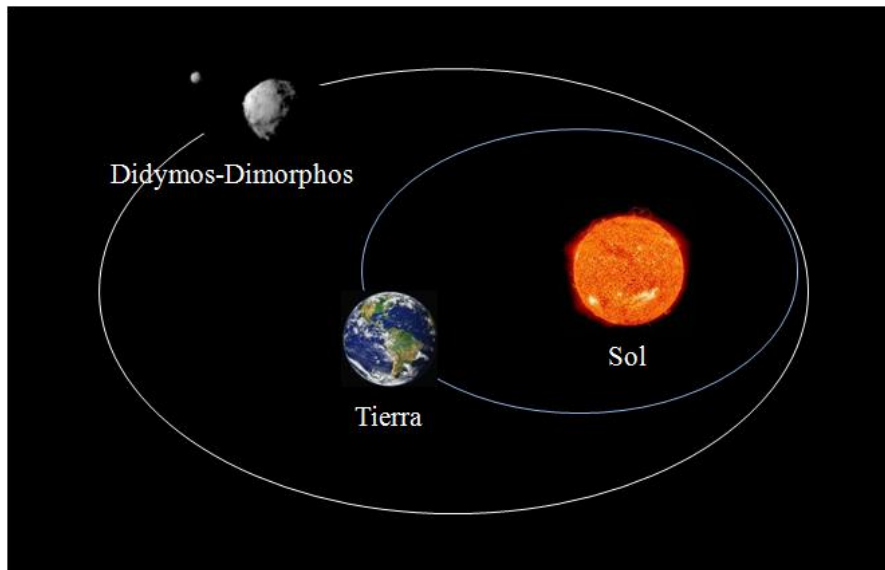


P2. Defensa planetaria: la misión DART

Hay miles de grandes asteroides en el sistema solar en órbitas cercanas a la Tierra, y muchos de ellos son potencialmente peligrosos debido al riesgo de impacto en un tiempo futuro¹. Por ese motivo, se han desarrollado programas de seguimiento de estos objetos celestes mediante telescopios y se han planteado distintas estrategias para evitar la amenaza de colisiones. El primer ensayo de defensa planetaria contra asteroides ha sido la misión DART (*Double Asteroid Redirection Test*) de la NASA, que el 26 de septiembre del año pasado logró modificar la órbita del asteroide-luna Dimorphos. La misión DART utiliza el método del *impacto cinético*, que consiste en desviar con antelación la trayectoria de un asteroide, cuando todavía está muy lejos de la Tierra, haciendo chocar deliberadamente la propia nave espacial con el asteroide para cambiar su velocidad.



El objetivo de DART fue el sistema asteroidal Didymos-Dimorphos, perteneciente al grupo de asteroides Apolo que cruzan la órbita de la Tierra. Se trata de un sistema binario formado por un asteroide principal llamado Didymos, una gran roca de unos 780 m de diámetro y $5.55 \cdot 10^{11}$ kg de masa, alrededor del cual orbita Dimorphos, un asteroide pequeñito y alargado de aproximadamente 150 m de diámetro equivalente y una masa de $0.05 \cdot 10^{11}$ kg. El sistema tiene una órbita alrededor del Sol muy excéntrica, con el perihelio (punto más cercano al Sol) situado a 1.01 UA y el afelio (punto más alejado del Sol) a 2.28 UA. En el momento del impacto con la nave DART, los asteroides estaban a unos 11 millones de km de la Tierra.

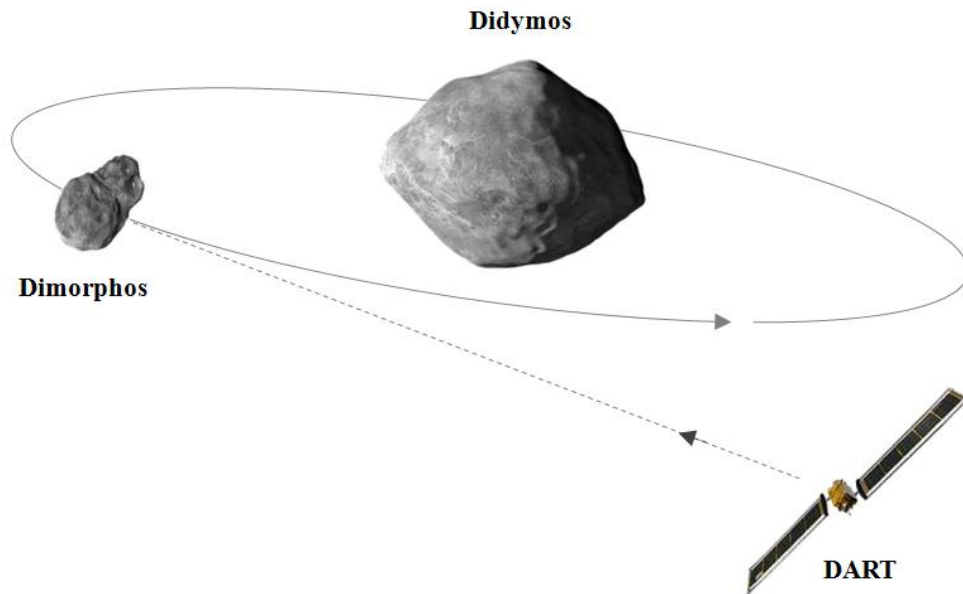
- a) ¿Cuántos años tarda el sistema Didymos-Dimorphos en completar una vuelta al Sol? (Realice los cálculos suponiendo que su órbita es circular tomando el radio orbital medio).

La órbita de Dimorphos alrededor de Didymos es prácticamente circular, y el radio orbital antes del impacto era de 1.2 km.

- b) Calcule el período orbital y la velocidad orbital de Dimorphos antes del impacto.

La nave DART, de 580 kg de masa, viajaba frontalmente contra Dimorphos a una velocidad de 6.2 km/s. Suponemos que la colisión entre DART y Dimorphos fue perfectamente inelástica y que se produjo sobre el centro de masas del asteroide.

¹ Se llaman “asteroides potencialmente peligrosos” a aquellos de tamaño mayor a 140 m, cuya distancia mínima de intersección con la órbita terrestre es una vigésima parte de la distancia entre la Tierra y el Sol. A esa distancia, se estima que la mayor perturbación orbital posible en un intervalo de 100 años podría resultar en una colisión, la cual produciría daños muy graves o catastróficos.



- c) Calcule la pérdida de velocidad, Δv , de Dimorphos esperada tras el impacto de DART. Exprese el resultado en mm/s.
- d) ¿Cuánto disminuiría el radio orbital de Dimorphos según el resultado anterior?
- e) ¿Cuál sería la nueva velocidad orbital de Dimorphos según el resultado anterior?
- f) ¿Cuánto se acortaría su período orbital según el resultado anterior? Demuestre que dicho acortamiento viene dado por la expresión $\Delta T / T_1 = 3 \Delta v / v_1$.

La misión DART fue todavía más exitosa de lo que se había proyectado. La NASA confirmó que, tras el choque, el período orbital de Dimorphos se había reducido en 33 minutos, un resultado mucho mayor al esperado según los cálculos anteriores. La explicación de esa discrepancia es que el impacto de la nave produjo un cráter en el asteroide con la consiguiente eyección de partículas, lo que amplificó el efecto de frenado. Se llama *eficiencia de la transferencia de momento*, β , al cociente entre el momento transferido al asteroide y el momento de la nave colisionadora. Se estima que tras el impacto se eyectaron partículas con una masa total de $5 \cdot 10^6$ kg. Suponemos que todas las partículas salieron en la misma dirección y en el mismo sentido del movimiento de Dimorphos, y que todas salieron con la misma velocidad.

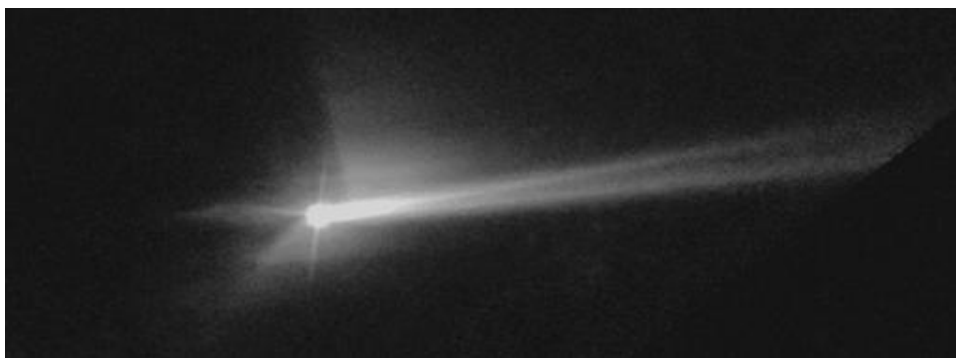


Foto de Dimorphos tomada por el Hubble que muestra la estela de masa eyectada tras el impacto

- g) Calcule la velocidad de la masa eyectada. Calcule el valor del factor β .
- h) Compare la velocidad del apartado anterior con las velocidades de escape de Dimorphos y de Didymos y explique qué esperamos que ocurra con las partículas eyectadas después de un tiempo suficientemente largo.

Datos: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, 1 UA (unidad astronómica) es igual a la distancia Tierra-Sol ($150 \cdot 10^6$ km).

Solución

- a) Se pregunta implícitamente por el período orbital del sistema Didymos-Dimorphos alrededor del Sol. Utilizamos la 3ª ley de Kepler:

$$T_{DD}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{Sol}} r_{DD}^3,$$

donde el radio orbital es el valor medio de las distancias al perihelio y al afelio:

$$r_{DD} = (1.01 + 2.28) / 2 = 1.645 \text{ UA}.$$

El enunciado no proporciona como dato la masa del Sol, pero sabemos que el período orbital de la Tierra es igual a 1 año y que orbita a 1 UA. Por tanto:

$$T_{DD} = r_{DD}^{3/2} T_T = (1.645)^{3/2} \cdot 1 = 2.11 \text{ años}.$$

- b) El período orbital de Dimorphos se obtiene igualmente utilizando la 3ª ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_D^3 = \frac{4\pi^2}{6.67 \cdot 5.55} (1200)^3 \rightarrow T = 42928 \text{ s} = 11 \text{ h } 55 \text{ min}.$$

donde la masa $M = 5.55 \cdot 10^{11} \text{ kg}$ es la de Didymos.

La velocidad orbital es

$$v_{orb} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 1200}{42928} = 0.1756 \text{ m/s}.$$

(También se puede calcular como $v_{orb} = \sqrt{GM/r} = \sqrt{6.67 \cdot 5.55 / 1200} = 0.1756 \text{ m/s}.$)

- c) En la colisión (perfectamente inelástica) de DART contra Dimorphos se conserva el momento lineal:

$$m v_1 - m_{dart} v_{dart} = (m + m_{dart}) v_2 \approx m v_2,$$

donde m es la masa de Dimorphos, $v_1 = v_{orb}$ la velocidad de Dimorphos antes del choque, m_{dart} la masa de la nave DART ($m_{dart} \ll m$), v_{dart} su velocidad antes del choque, y v_2 la velocidad del conjunto (que queda unido) tras el choque.

La pérdida de velocidad, $\Delta v = v_2 - v_1$, se despeja de la ecuación de conservación del momento:

$$m v_2 - m v_1 = -m_{dart} v_{dart} \rightarrow m \Delta v = -m_{dart} v_{dart} \rightarrow \Delta v = \frac{-580 \cdot 6200}{0.05 \cdot 10^{11}} = -0.7 \text{ mm/s}.$$

(Es una pérdida de sólo el 0.4 %, pero suficiente para el propósito de estas misiones.)

- d) La velocidad del asteroide justo después del impacto es

$$v_2 = v_1 + \Delta v = 0.1756 - 0.0007 = 0.1749 \text{ m/s}.$$

Por tanto, debido a la colisión, Dimorphos pierde una energía cinética igual a

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{0.05 \cdot 10^{11}}{2} (0.1749^2 - 0.1756^2) = -613375 \text{ J}.$$

Al frenarse, Dimorphos cambia a una órbita de menor radio. Por el principio de conservación, la energía total en la nueva órbita debe ser igual a la energía en la órbita inicial más la energía perdida:

$$E_2^{orb} = E_1^{orb} + \Delta E = \frac{-GMm}{2r_1} + \Delta E = \frac{-6.67 \cdot 5.55 \cdot 0.05 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 1200} - 613375 = -77735250 \text{ J}.$$

Entonces, se puede calcular el nuevo radio orbital:

$$E_{orb2} = \frac{-GMm}{2r_2} \rightarrow r_2 = \frac{-6.67 \cdot 5.55 \cdot 0.05 \cdot 10^{11}}{2 \cdot (-77735250)} = 1190.5 \text{ m}.$$

Y, finalmente, la disminución del radio que pide el enunciado sería

$$\Delta r = r_2 - r_1 = -9.5 \text{ m}.$$

En lugar de hacer los cálculos paso a paso, se puede obtener una expresión teórica. La pérdida de energía en la colisión, la diferencia de energía total entre la órbita inicial y la órbita final y el

principio de conservación de la energía dan:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m (v_1^2 + 2v_1 \Delta v + \Delta v^2 - v_1^2) \approx m v_1 \Delta v.$$

$$E_{orb2} - E_{orb1} = \Delta E \rightarrow \frac{-GMm}{2r_2} - \frac{-GMm}{2r_1} = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx \frac{GMm}{2} \frac{\Delta r}{r_1^2}.$$

$$\frac{GMm}{2} \frac{\Delta r}{r_1^2} = \frac{m v_1^2}{2} \frac{\Delta r}{r_1} = m v_1 \Delta v \rightarrow \frac{\Delta r}{r_1} = 2 \frac{\Delta v}{v_1}.$$

(El resultado calculado con esta expresión es el mismo que antes: $\Delta r = -9.5$ m.)

- e) Como el nuevo radio orbital es $r_2 = 1190.5$ m, la nueva velocidad orbital sería

$$v_{orb2} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 5.55}{1190.5}} = 0.1763 \text{ m/s}.$$

Nótese que esta nueva velocidad orbital no es igual a la velocidad v_2 justo después del impacto, de hecho es mayor ($v_{orb2} > v_2$). Cuando Dimorphos se frena tras el impacto, es acelerado a una órbita de menor radio donde la velocidad orbital es mayor.

- f) En la nueva órbita, el período de Dimorphos pasaría a ser

$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_{orb2}} = \frac{2\pi \cdot 1190.5}{0.1763} = 42428 \text{ s} = 11 \text{ h } 47 \text{ min},$$

lo que supone un **acortamiento de 8 minutos**.

(También puede calcularse usando directamente la 3ª ley de Kepler con el nuevo radio r_2 .)

Para obtener la expresión que relaciona ΔT con la pérdida de velocidad tras el impacto Δv , derivamos en la 3ª ley de Kepler y usamos el resultado $\Delta r / r_1 = 2\Delta v / v_1$ del apartado d). Obtenemos:

$$2T dT = \frac{4\pi^2}{GM} 3r^2 dr \rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{3}{2} \frac{\Delta r}{r} = 3 \frac{\Delta v}{v}.$$

(Ésta es la expresión que aparece en algunos artículos científicos de la misión DART.)

- g) Si el acortamiento real del período orbital fue de 33 minutos es porque la pérdida de velocidad fue

$$\Delta v = \frac{\Delta T}{3T_1} v_1 = \frac{-33 \cdot 60}{3 \cdot 42928} \cdot 0.1756 = -2.7 \text{ mm/s}.$$

Planteamos de nuevo la conservación del momento lineal teniendo en cuenta la masa m_e eyectada:

$$m v_1 - m_{dart} v_{dart} = (m + m_{dart}) v_2 + m_e v_e \approx m v_2 + m_e v_e.$$

Por tanto, la velocidad de la masa eyectada es

$$v_e = \frac{-m \Delta v - m_{dart} v_{dart}}{m_e} = \frac{-0.05 \cdot 10^{11} \cdot (-2.7 \cdot 10^{-3}) - 580 \cdot 6200}{5 \cdot 10^6} = 2 \text{ m/s}.$$

El factor β (eficiencia de la transferencia de momento), por definición, es

$$\beta = \frac{m |\Delta v|}{m_{dart} v_{dart}} = \frac{0.05 \cdot 10^{11} \cdot 2.7 \cdot 10^{-3}}{580 \cdot 6200} = 3.75.$$

(Debido a la masa eyectada, se produce una amplificación del momento transferido por la nave colisionadora. Así, el frenado es mucho más efectivo que el debido a un simple choque inelástico.)

- h) Las velocidades de escape son

$$\text{Dimorphos: } v_{esc} = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 0.05 / (150/2)} = 0.09 \text{ m/s}.$$

$$\text{Didymos: } v_{esc} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 5.55 / (780/2)} = 0.44 \text{ m/s}.$$

La velocidad de las partículas eyectadas es mayor que las velocidades de escape, por tanto, las partículas acabarán **escapando del sistema al espacio** y entrarán en alguna órbita alrededor del Sol.