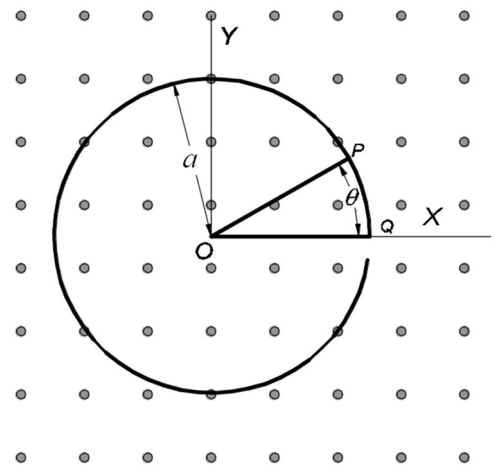


P2. Inducción

En la figura se muestra un alambre conductor que tiene un tramo con forma de arco de circunferencia de radio a , y dos segmentos rectos OQ y OP . El alambre tiene una resistencia por unidad de longitud R_0 . El segmento OQ está fijo, pero el segmento OP gira sin rozamiento respecto al punto O en sentido antihorario con aceleración angular constante α partiendo del reposo. En el instante inicial los dos segmentos rectos coinciden.

El alambre está en el seno de un campo magnético perpendicular al plano donde está situado dicho alambre, y está creado por un solenoide muy largo (que no se muestra en la figura) de n espiras por unidad de longitud muy apretadas, por el que circula una corriente cuasiestacionaria $I(t) = I_0 t$ (es decir, en un instante dado la corriente es la misma en todas las partes del solenoide).



- Obtenga la expresión (en forma vectorial) del campo magnético en función del tiempo. Explique adecuadamente el procedimiento seguido.
- Calcule el flujo del campo magnético, en función del tiempo, a través del circuito cerrado de alambre. Si no logra obtener la expresión completa, obtenga al menos la dependencia funcional con el tiempo mediante algún razonamiento.
- Calcule, en función del tiempo, la fuerza electromotriz inducida en el circuito cerrado de alambre.
- Calcule la intensidad que circula por el circuito cerrado de alambre en función del tiempo.
- Explique razonadamente el sentido de circulación de la intensidad en el circuito cerrado de alambre.

P2 Solución

- a) A partir de la ley de Ampère se puede deducir el campo que crea el solenoide en cualquier punto del espacio.

De acuerdo con los ejes de la figura, el campo está en la dirección del vector unitario $\hat{k}$:

$$\vec{B}(t) = \mu_0 n I(t) \hat{k} = \mu_0 n I_0 t \hat{k}$$

Nótese que la constante I_0 tiene dimensiones de intensidad por unidad de tiempo.

- b) El flujo del campo a través de una superficie es

$$\phi_B(t) = \int_S (\mu_0 n I_0 t \hat{k}) \cdot (dS \hat{k}) = \mu_0 n I_0 t S$$

La superficie del circuito cerrado de alambre es la del sector circular encerrado por OPQ (puede deducirse sabiendo la relación entre radio y ángulo en la expresión del área de un círculo):

$$S = \frac{1}{2} a^2 \theta(t)$$

Para obtener el ángulo en función del tiempo consideramos que se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado; por tanto, el ángulo en función del tiempo es

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

El flujo resulta

$$\phi_B(t) = \frac{1}{4} \mu_0 n I_0 a^2 \alpha t^3$$

- c) La fuerza electromotriz inducida en el circuito es $\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt}$. Derivando el flujo se obtiene

$$\varepsilon(t) = -\frac{3}{4} \mu_0 n I_0 a^2 \alpha t^2$$

- d) Primero calculamos la resistencia del circuito cerrado de alambre OPQ en función del tiempo, que es la suma de las resistencias correspondientes a los tres tramos del circuito (dos rectilíneos y uno circular):

$$R(t) = (2a + L(t)) R_0$$

donde L es la longitud del arco de circunferencia (puede deducirse sabiendo la relación entre radio y ángulo en la expresión de la longitud de una circunferencia) recorrido en un tiempo t :

$$L = a \theta(t)$$

Así, la resistencia es

$$R(t) = \left(2a + a \frac{1}{2} \alpha t^2 \right) R_0 = \left(2 + \frac{1}{2} \alpha t^2 \right) a R_0$$

Finalmente, utilizando la ley de Ohm obtenemos la intensidad inducida en función del tiempo:

$$I_{inducida}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R(t)} = \frac{-\frac{3}{4}\mu_0 n I_0 a^2 \alpha t^2}{\left(2 + \frac{1}{2}\alpha t^2\right) a R_0} \rightarrow$$

$$I_{inducida}(t) = -\frac{3\mu_0 n I_0 a \alpha t^2}{R_0 (8 + 2\alpha t^2)}$$

- e) El flujo del campo es positivo y aumenta con el tiempo, por tanto $I_{inducida}(t)$ ha de recorrer el alambre en sentido horario. Esto se puede razonar de manera alternativa a partir de la ley de Lenz.