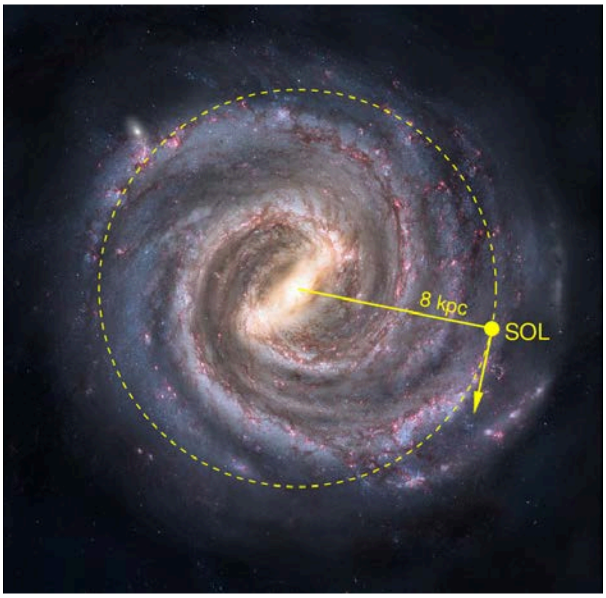
P2 La materia de la Vía Láctea

Desde los años 30 del siglo pasado los físicos creen que en el universo debe existir mucha más materia de la que podemos ver (estrellas, gas interestelar, planetas, etc.). A esa materia no visible se la llama *materia oscura* y, a día de hoy, aún se desconoce qué la constituye; sólo sabemos que interacciona con la materia visible (también llamada *materia ordinaria*) mediante la gravedad. En las últimas décadas se ha acumulado abundante evidencia experimental de su existencia mediante observaciones astrofísicas y cosmológicas. En particular, se sabe que nuestra galaxia, la Vía Láctea, debe contener más materia oscura que materia ordinaria.

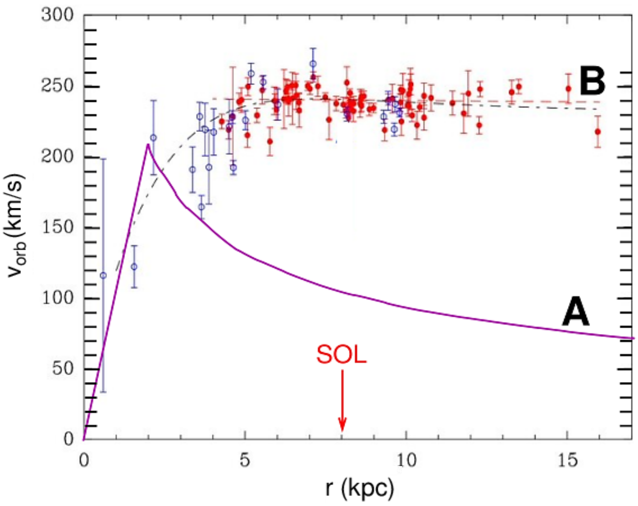


Una galaxia espiral común como la Vía Láctea está formada por un bulbo central aproximadamente esférico donde se acumula la mayor parte de la masa ordinaria de la galaxia, y un disco aplanado con forma espiral. En este problema vamos a suponer que toda la masa ordinaria está concentrada en el bulbo central de radio R_b y masa M_b (es decir, despreciaremos la masa del disco galáctico). Supondremos que la densidad del bulbo es constante.

Una de las primeras evidencias de la materia oscura se observó en las llamadas *curvas de rotación*, que representan la velocidad orbital de una estrella en su movimiento de rotación alrededor del centro de su galaxia.

a) Considere una estrella situada a una distancia r del centro galáctico. Obtenga su velocidad orbital $v_{orb}(r)$ en función de r, R_b, M_b y G (constante de gravitación), en las dos regiones $r < R_b$ y $r > R_b$.

Ayuda: Sólo la materia contenida dentro de la esfera de radio r contribuye para el cálculo de la fuerza gravitatoria a la distancia r.



Para la Vía Láctea, la representación gráfica de $v_{orb}(r)$ del apartado anterior corresponde a la curva A de la figura adjunta. Sin embargo, experimentalmente se observan los puntos indicados, para distintas estrellas, que se ajustan bien a la curva B. Como puede apreciarse, la velocidad orbital no es decreciente para $r > R_b$, sino que es aproximadamente constante.

b) Obtenga de la gráfica el radio R_b del bulbo de materia visible de la Vía Láctea y la velocidad orbital de una estrella situada en $r = R_b$. A partir de estos valores, calcule la masa M_b de la materia ordinaria de la Vía Láctea. Exprese el resultado en masas solares.

El hecho de que la velocidad orbital sea constante lejos del bulbo puede explicarse si, además de la materia visible, consideramos la materia oscura, que no podemos detectar salvo por sus efectos gravitatorios. Supongamos que la densidad de materia oscura es de la forma

$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{k}{r^2} & \text{si } r \le R_g \\ 0 & \text{si } r > R_g \end{cases} \qquad (1)$$

donde k es una constante y R_g es el radio que fija el borde de la galaxia hasta donde se extiende la materia oscura. Se ha estimado que para la Vía Láctea $R_g \simeq 58\ \text{kpc}$. Vamos a considerar distancias grandes fuera del bulbo, para poder despreciar el efecto de la materia visible, pero inferiores al radio galáctico de materia oscura, es decir $R_b \ll r \le R_g$.

c) Demuestre que, con la densidad (1), la masa de la materia oscura contenida en una esfera de radio r crece linealmente como $M(r) = 4\pi k r$. Demuestre también que, en efecto, se obtiene una velocidad orbital constante de valor $v_c = \sqrt{4\pi G k}$.

d) Teniendo en cuenta el valor de v_c para la Vía Láctea que se obtiene de la gráfica, calcule la masa M_g (en masas solares) de toda la materia oscura de la Vía Láctea.

e) Sabiendo que el Sol se encuentra a 8 kpc del centro galáctico, calcule la densidad de materia oscura en el Sistema Solar. Compárela con el valor de la densidad de la materia ordinaria en el espacio interplanetario en el Sistema Solar, que es de unos 5 átomos de H por cada cm^3.

Hay modelos alternativos para explicar la planitud de la curva de rotación que no recurren a la materia oscura. Uno de ellos es la llamada teoría MOND (por *Modified Newtonian Dynamics*), que propone una modificación de la 2ª ley de Newton, $F = m a$, sustituyéndola por una ley más general del tipo

$$F = m a\, \mu(x) \qquad (2)$$

donde $x = a/a_0$, a_0 es una constante, y $\mu(x)$ es una función que tiende a 1 cuando $x \gg 1$ y tiende a x cuando $x \ll 1$. Así, cuando las aceleraciones son mucho mayores que la constante a_0 se está en el régimen newtoniano clásico, mientras que si las aceleraciones son mucho menores que a_0 domina el llamado régimen MOND.

f) Asumiendo el régimen MOND en nuestra galaxia, determine la velocidad orbital constante v_c en función de M_b, a_0 y G, y calcule el valor de a_0. Calcule también la aceleración de la Tierra en su órbita en torno al Sol. Comparando los dos valores, indique si es coherente aplicar la teoría MOND en el Sistema Solar.

Volvamos a la hipótesis de la materia oscura y a la densidad dada por la Ec. (1).

g) Demuestre que la velocidad de escape de la galaxia, desde un punto a distancia r del centro, es

$$v_{esc}^2(r) = 2 v_c^2 \cdot \left(1 + \ln \frac{R_g}{r}\right) \qquad (3)$$

Ayuda: Para que una masa escape del campo gravitatorio debe tener una energía cinética igual al trabajo que realiza la fuerza gravitatoria para llevar la masa desde su posición hasta el infinito. Utilice la expresión de la masa $M(r)$ del apartado c) para $r < R_g$ y el valor M_g para $r \ge R_g$.

Ayuda: $\int \frac{dx}{x} = \ln x + cte \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + cte$

Nos preguntamos si la velocidad orbital de las estrellas de la Vía Láctea es suficiente para que alguna de ellas, en particular el Sol junto a todo nuestro Sistema Solar, pueda escapar de la galaxia. Se sabe que el disco espiral galáctico tiene un radio de 25 kpc.

h) ¿Puede escapar alguna estrella teniendo en cuenta sólo su velocidad orbital v_c? ¿Cuánta velocidad debería ganar el Sol, en la dirección de su velocidad orbital galáctica, para que pudiera escapar de la galaxia?

DATOS:

Un kpc es un "kilo parsec", donde 1 parsec (pc) = 3,26 años - luz

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ $\qquad M_{\text{Sol}} = 1{,}99 \times 10^{30}\ \text{kg}$ $\qquad$ Distancia Tierra - Sol: $150 \times 10^6\ \text{km}$

Masa del átomo hidrógeno = $1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}$

P2 Solución

a) Igualando la fuerza gravitatoria a la fuerza centrípeta obtenemos la velocidad orbital:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M\,m}{r^2} \quad\to\quad v_{orb}(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

Como la densidad es constante dentro del bulbo:

$$\rho = \frac{M_b}{4/3\pi R_b^{\,3}} = \frac{M(r)}{4/3\pi r^3} \quad\to\quad M(r) = M_b\left(r/R_b\right)^3$$

Zona interior del bulbo, $r < R_b$: $\boxed{v_{orb}(r) = \sqrt{\frac{GM_b}{R_b^3}r^2}}$ (4)

Zona exterior del bulbo, $r > R_b$: $\boxed{v_{orb}(r) = \sqrt{\frac{GM_b}{r}}}$ (5)

b) De la gráfica obtenemos que el radio del bulbo de materia visible es $R_b = 2$ kpc y que la velocidad orbital en el límite del bulbo es $v_{orb}(R_b) = 210$ km/s. Convertimos las unidades de kpc:

$$1\ \text{kpc} = 10^3\cdot 3{,}26\cdot(3\times10^8\cdot 365\cdot 24\cdot 3600) = 3{,}085\times10^{19}\ \text{m}$$

Entonces: $R_B = 2\ \text{kpc} = 6{,}17\times10^{19}\ \text{m}$

Por tanto, despejando de (4) o de (5) con $r = R_b$, obtenemos la masa de la materia ordinaria:

$$M_b = \frac{R_b\,v_{orb}^{\;2}}{G} = \frac{6{,}17\times10^{19}\cdot(210\times10^3)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = 4{,}08\times10^{40}\ \text{kg} = \boxed{2{,}0\times10^{10}\,M_{\text{Sol}}}$$

c) Consideramos la masa infinitesimal dM contenida en una capa esférica de radio r y espesor dr. El volumen de la capa es $dV = 4\pi r^2 dr$. A partir de la densidad (1) se puede obtener dM :

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} = \frac{dM}{dV} \quad\to\quad dM = \frac{k}{r^2}dV = \frac{k}{r^2}4\pi r^2 dr = 4\pi k\,dr$$

Así, la masa total contenida en la esfera de radio r es

$$M(r) = \int_0^r 4\pi k\,dr = \boxed{4\pi k\,r} \qquad (6)$$

Con esta masa, se obtiene una velocidad orbital constante:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{G4\pi k r}{r}} = \boxed{\sqrt{4\pi G k}} \qquad (7)$$

d) Conocida la velocidad v_c , despejamos la masa contenida en una esfera de radio r :

$$v_c = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad\to\quad M(r) = \frac{v_c^2}{G}r$$

Por tanto, la masa total de materia oscura es

$$M_g = M(r = R_g) = \frac{v_c^2}{G}R_g \qquad (8)$$

De la gráfica: $v_c = 240$ km/s. Y del enunciado, el radio hasta donde se extiende la materia oscura es

$$R_g = 58 \text{ kpc} = 58 \cdot 3{,}085 \times 10^{19} = 178{,}93 \times 10^{19} \text{ m}$$

Así, la masa total de materia oscura resulta

$$M(R_g) = \frac{(240 \times 10^3)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} \cdot 178{,}93 \times 10^{19} = 1{,}54 \times 10^{42} \text{ kg} = \boxed{7{,}7 \times 10^{11} M_{\text{Sol}}}$$

que es mucho mayor que la masa del bulbo visible.

e) La densidad (1) de la materia oscura es

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} = \frac{v_c^2}{4\pi G} \frac{1}{r^2}$$

en donde k se ha obtenido de (7).

El Sol está a una distancia del centro galáctico de

$$8 \text{ kpc} = 8 \cdot 3{,}085 \times 10^{19} = 24{,}68 \times 10^{19} \text{ m}$$

Entonces, la densidad de la materia oscura es el Sistema Solar es

$$\rho_{oscura} = \frac{(240 \times 10^3)^2}{4\pi \cdot 6{,}67 \times 10^{-11}} \frac{1}{(24{,}68 \times 10^{19})^2} = \boxed{1{,}1 \times 10^{-21} \text{ kg/m}^3}$$

Y la densidad de la materia ordinaria, o visible, teniendo en cuenta la masa de los átomos de hidrógeno, es

$$\rho_{ordinaria} = \frac{5 \cdot 1{,}67 \times 10^{-27}}{(10^{-2})^3} = \boxed{8{,}4 \times 10^{-21} \text{ kg/m}^3}$$

Por tanto, en nuestro Sistema Solar las densidades de materia ordinaria y de materia oscura son del mismo orden de magnitud.

f) Según la teoría MOND la fuerza será

$$F = m a \mu(a/a_0) = m a \frac{a}{a_0} = m \frac{a^2}{a_0} \qquad (9)$$

Como nos piden la velocidad orbital constante, está claro que estamos en la zona $r > R_b$ y, por tanto, la masa de la galaxia a tener en cuenta es toda la del bulbo, M_b.

Aplicando la ley de la gravitación y teniendo en cuenta que toda la aceleración es centrípeta, $a = v^2 / r$, con (9) obtenemos para la velocidad orbital:

$$G\frac{M_b m}{r^2} = m\frac{a^2}{a_0} = \frac{m}{a_0}\frac{v^4}{r^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt[4]{G M_b a_0} \equiv v_c}$$

La aceleración es $a_0 = \dfrac{v_c^4}{G M_b}$ y podemos calcularla a partir de M_b obtenida en b) y del valor $v_c = 240$ km/s obtenido de la gráfica:

$$a_0 = \frac{(240 \times 10^3)^4}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 4{,}08 \times 10^{40}} = \boxed{1{,}2 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2}$$

Para saber si este valor es grande o pequeño, lo comparamos con la aceleración que siente la Tierra debida a la atracción del Sol:

$$a = G\frac{M_{\text{Sol}}}{d_{\text{T-Sol}}^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{1{,}99 \times 10^{30}}{(150 \times 10^9)^2} = 5{,}9 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Para ser válido el régimen MOND en el Sistema Solar debería ser $a \ll a_0$, y sin embargo hemos obtenido lo contrario: que $a_0 \ll a$. Por ello, la teoría MOND no permite entender los efectos gravitatorios reales sobre los planetas del Sistema Solar, como la Tierra [1].

g) El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria para llevar la masa desde la posición r hasta el infinito debe separarse en dos partes:

$$W_r^\infty = \int_r^\infty -G\frac{m\,M(r)}{r^2}dr = -Gm\int_r^{R_g}\frac{M(r)}{r^2}dr - Gm\int_{R_g}^\infty \frac{M_g}{r^2}dr =$$

$$= -Gm\int_r^{R_g}\frac{4\pi k\,r}{r^2}dr - Gm\int_{R_g}^\infty\frac{4\pi k\,R_g}{r^2}dr = -4\pi Gkm\left(\int_r^{R_g}\frac{dr}{r} + R_g\int_{R_g}^\infty\frac{dr}{r^2}\right) = -4\pi Gkm\left(\ln\frac{R_g}{r}+1\right)$$

Igualando a la energía cinética y sabiendo el valor de k obtenido de (7):

$$\frac{1}{2}m v_{esc}^2 - v_c^2 m\left(\ln\frac{R_g}{r}+1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad v_{esc}^2 = 2v_c^2\left(\ln\frac{R_g}{r}+1\right) \qquad (10)$$

h) Las estrellas que más posibilidades tienen de escapar son las que están en el borde del disco, $r = 25$ kpc, pues la velocidad de escape disminuye según nos alejamos del centro galáctico. De la expresión (10) anterior, la velocidad de escape para esas estrellas es

$$v_{esc}(r=25) = 240\sqrt{2\left(\ln\frac{58}{25}+1\right)} = 461\ \text{km/s}$$

Como ese valor es bastante superior a la velocidad orbital $v_c = 240$ km/s, significa que las estrellas no pueden escapar [2].

Repetimos el cálculo para el Sol:

$$v_{esc}(r=8) = 240\sqrt{2\left(\ln\frac{58}{8}+1\right)} = 586\ \text{km/s}$$

Para escapar, el Sol tendría que ganar una velocidad de

$$586 - 240 = 346\ \text{km/s}$$

---

[1] Además, la teoría MOND no explica otras evidencias experimentales de la materia oscura y, por tanto, la comunidad científica no la considera una explicación plausible.

[2] Se han descubierto *estrellas hiperveloces*, posiblemente catapultadas por grandes explosiones, con velocidades de más de 700 km/s, que sí escaparían de la galaxia.