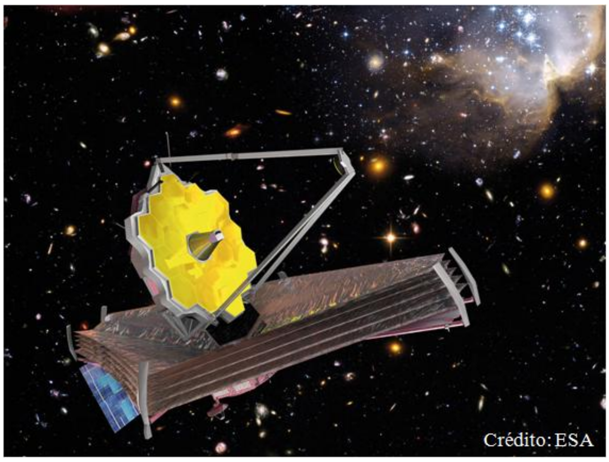
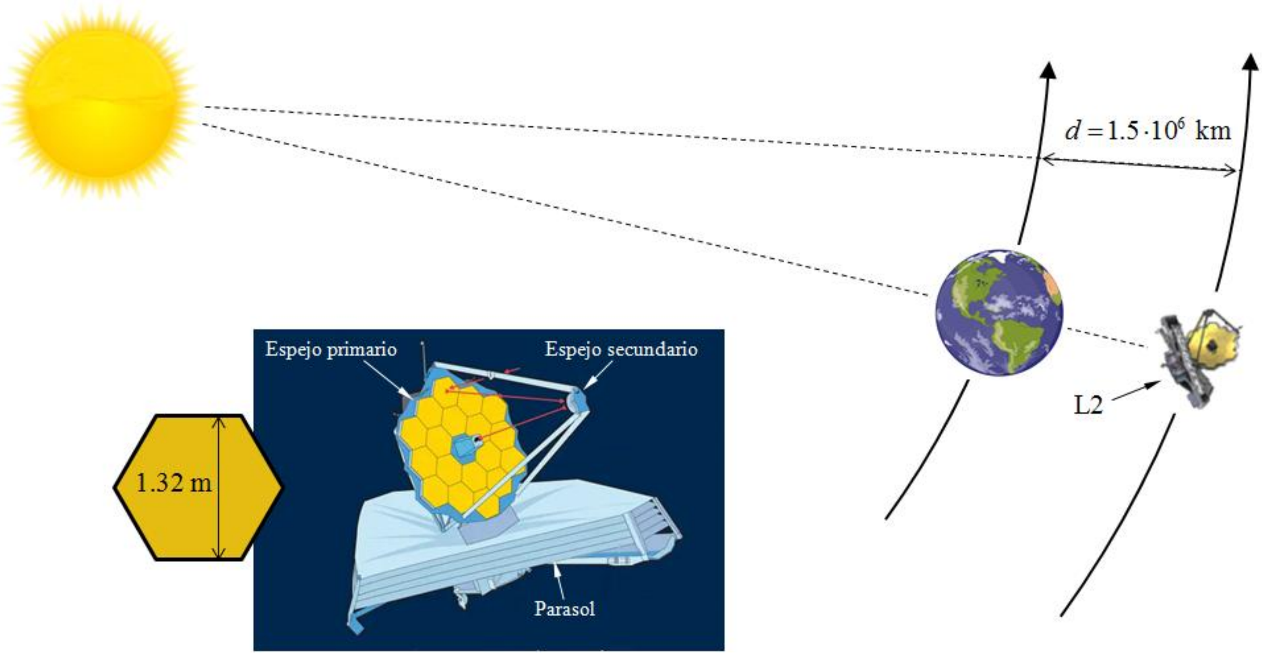
P2. El telescopio espacial Webb

El pasado día de Navidad se lanzó al espacio el telescopio James Webb, a bordo de un cohete Ariane 5 que despegó de la base espacial de la Guayana Francesa, y viajó durante un mes hasta su destino situado a una distancia de la Tierra igual a cuatro veces la distancia lunar. El telescopio Webb es el mayor y más potente jamás construido. Al igual que ocurrió con el Hubble, se espera que podamos dar otro paso de gigante para comprender el universo. El Webb examinará los primeros destellos de luz tras el Big Bang, la formación de galaxias, estrellas y planetas, y la evolución de nuestro sistema solar.



El telescopio Webb es enorme, casi tres veces más grande que el Hubble. El espejo primario del Hubble es circular de 2.4 m de diámetro, con un orificio central de 0.6 m de diámetro. Sin embargo, el espejo primario del Webb no es circular, tiene un innovador diseño que consiste en un mosaico de 18 piezas hexagonales con un ancho cada una de 1.32 m medido entre dos lados paralelos. El espejo secundario y el soporte obstruyen el paso de la luz hacia los hexágonos ocupando un área de 0.9 m^2.



a) ¿Cuántas veces más radiación puede captar el Webb que el Hubble? (Nota: el área de un hexágono de apotema a es $A = 6a^2 \tan 30^\circ$. La apotema une el centro del hexágono con el centro de un lado.)

El telescopio se encuentra en una órbita alrededor del Sol en un punto llamado L2, o segundo punto de Lagrange, que está situado en la línea definida por el Sol y la Tierra a una distancia de 1.5 millones de km más allá de la Tierra. El punto L2 tiene la propiedad de que un objeto situado allí orbita el Sol sincrónicamente con la Tierra.

b) Calcule el tiempo que tardan las comunicaciones entre la Tierra y el telescopio Webb.

c) Según la 3ª ley de Kepler, si un objeto orbita el Sol a la distancia a la que está el telescopio, pero en un punto distinto a L2, su período orbital es mayor que el de la Tierra. Calcule dicho período en días. Dato: distancia Tierra-Sol, $d_{\text{T-S}} = 150 \cdot 10^6\ \text{km}$.

d) Explique por qué en L2 no se viola la ley de Kepler y el telescopio se mueve con el mismo período orbital que la Tierra y no con uno mayor.

e) Demuestre que la distancia entre la Tierra y el punto L2 es aproximadamente

$$d \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{T}}}{3M_{\text{S}}}}\, d_{\text{T-S}}\,.$$

Ayuda: como $x = \dfrac{d}{d_{\text{T-S}}} \ll 1$, haga la aproximación $\dfrac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$.

En realidad, el telescopio no está exactamente en el punto L2, sino moviéndose en torno a él en una órbita secundaria llamada órbita de "halo", de tamaño similar al de la órbita lunar. De esa manera evita la sombra de la Tierra que impediría el funcionamiento de sus paneles solares.

f) Calcule la intensidad de radiación solar que llega al telescopio Webb, sabiendo que la intensidad de radiación solar que recibe la Tierra vale 1361 W/m^2.

Cada pieza hexagonal del espejo está fabricada con una base de berilio, de 20 kg de masa, recubierta por una película de oro para reflejar la luz infrarroja.

g) ¿Qué incremento de temperatura experimentaría el espejo en 1 minuto debido a la radiación solar? Suponga que el berilio absorbe toda la energía solar. Dato: el calor específico del berilio es $1830\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

El Webb está diseñado para detectar señales muy débiles de luz infrarroja, por lo que los espejos deben permanecer a temperaturas muy bajas (inferiores a -220 ºC). Por ese motivo, el telescopio cuenta con un enorme parasol de $21\ \text{m} \times 14\ \text{m}$ recubierto de aluminio que apantalla prácticamente toda la radiación solar. Sabemos que las ondas electromagnéticas que inciden sobre una superficie perfectamente reflectante ejercen una presión de radiación dada por la expresión

$$p = 2I / c\,,$$

donde I es la intensidad de la radiación y c la velocidad de la luz. Suponemos que el parasol del Webb es un reflector perfecto.

h) Calcule la fuerza que ejerce la radiación solar sobre el parasol, suponiendo que está orientado perpendicularmente a los rayos solares. Y calcule cuántos órdenes de magnitud menor es esa fuerza que la fuerza gravitatoria. Dato: el telescopio tiene una masa de 6200 kg.

P2. SOLUCIÓN

a) La cantidad de luz captada por cada telescopio es proporcional al área de sus espejos primarios. El área del espejo de Hubble, descontando el orificio central, es

$$A_{\rm H} = \pi\left(2.4^2 - 0.6^2\right)/4 = 4.24\ {\rm m}^2 .$$

La apotema de cada hexágono del Webb mide $a = 1.32/2 = 0.66$ m. El área efectiva del espejo del Webb será la de los 18 hexágonos menos el área de 0.9 m^2 tapada por el espejo secundario:

$$A_{\rm W} = 18\cdot(6a^2\tan 30^{\rm o}) - 0.9 = 26.3\ {\rm m}^2 .$$

El cociente de las dos áreas nos da el valor pedido: el telescopio Webb puede captar 6.2 veces más luz que el Hubble.

b) El telescopio siempre se encuentra a 1.5 millones de km de la Tierra porque orbita sincrónicamente con ella. Las ondas electromagnéticas utilizadas para comunicarnos con el telescopio tardan en recorrer esa distancia un tiempo

$$t = \frac{d}{c} = \frac{1.5\cdot 10^9}{3\cdot 10^8} = 5\ {\rm s} .$$

c) La Tierra orbita el Sol a una distancia $d_{\rm T\text{-}S} = 150\cdot 10^6$ km. Como el telescopio está situado más allá de la Tierra una distancia $d = 1.5\cdot 10^6$ km, se encuentra a una distancia $r = d_{\rm T\text{-}S} + d = 151.5\cdot 10^6$ km del Sol. Según la 3ª ley de Kepler, los cuadrados de los períodos orbitales son proporcionales a los cubos de los radios orbitales medios. Entonces, un cuerpo orbitando el Sol a una distancia r tendrá un período

$$T = \left(\frac{r}{d_{\rm T\text{-}S}}\right)^{3/2} T_{\rm T} = \left(\frac{151.5}{150}\right)^{3/2}\cdot 365 = 370\ \text{días} .$$

Dicho período es mayor que el de la Tierra, por corresponder a una órbita de mayor tamaño. Una excepción ocurre cuando el cuerpo está en el punto L2, como se discute a continuación.

d) Como L2 está permanentemente en línea con el Sol y la Tierra, la fuerza centrípeta sobre el telescopio es la suma de las fuerzas gravitatorias del Sol y de la Tierra, ambas en la misma dirección y sentido. El punto L2 está a la distancia exacta para que la fuerza centrípeta allí sea mayor que la fuerza del Sol sobre la Tierra justo en la medida necesaria para que el período orbital del telescopio sea el mismo que el de la Tierra.

e) La fuerza centrípeta sobre un cuerpo de masa m situado en L2 es la suma de las fuerzas atractivas del Sol y de la Tierra:

$$\frac{GM_{\rm S}m}{(d_{\rm T\text{-}S}+d)^2} + \frac{GM_{\rm T}m}{d^2} = m\frac{v^2}{d_{\rm T\text{-}S}+d} ,$$

donde $v = 2\pi(d_{\rm T\text{-}S}+d)/T$ es la velocidad orbital de la masa m, y T su período orbital. Por otro lado, como el período orbital debe ser igual al de la Tierra, podemos escribir:

$$T = \frac{2\pi(d_{\rm T\text{-}S}+d)}{v} = \frac{2\pi d_{\rm T\text{-}S}}{v_{\rm T}} \quad\rightarrow\quad v = \frac{d_{\rm T\text{-}S}+d}{d_{\rm T\text{-}S}}v_{\rm T} ,$$

donde $v_{\rm T} = \sqrt{GM_{\rm S}/d_{\rm T\text{-}S}}$ es la velocidad orbital de la Tierra. Así, la expresión de la fuerza centrípeta queda

$$\frac{GM_{\rm S}}{(d_{\rm T\text{-}S}+d)^2} + \frac{GM_{\rm T}}{d^2} = \frac{(d_{\rm T\text{-}S}+d)}{d_{\rm T\text{-}S}{}^2}v_{\rm T}{}^2 = \frac{(d_{\rm T\text{-}S}+d)}{d_{\rm T\text{-}S}{}^2}\frac{GM_{\rm S}}{d_{\rm T\text{-}S}} \quad\rightarrow$$

$$\frac{M_\mathrm{S}}{d_\mathrm{T\text{-}S}{}^2(1+d/d_\mathrm{T\text{-}S})^2}+\frac{M_\mathrm{T}}{d^2}=\frac{(1+d/d_\mathrm{T\text{-}S})M_\mathrm{S}}{d_\mathrm{T\text{-}S}{}^2} \quad\rightarrow\quad \frac{M_\mathrm{T}}{d^2}=\frac{M_\mathrm{S}}{d_\mathrm{T\text{-}S}{}^2}\left((1+x)-\frac{1}{(1+x)^2}\right),$$

donde $x=d/d_\mathrm{T\text{-}S}\ll 1$, y podemos hacer la aproximación $1/(1+x)^2\approx 1-2x$. Simplificando y despejando, obtenemos la distancia entre la Tierra y el punto L2:

$$\frac{M_\mathrm{T}}{d^2}\approx\frac{M_\mathrm{S}}{d_\mathrm{T\text{-}S}{}^2}\big(1+x-(1-2x)\big)=\frac{M_\mathrm{S}}{d_\mathrm{T\text{-}S}{}^2}3x \quad\rightarrow\quad x=\frac{d_\mathrm{T\text{-}S}{}^2}{d^2}\frac{M_\mathrm{T}}{3M_\mathrm{S}} \quad\rightarrow\quad d\approx\sqrt[3]{\frac{M_\mathrm{T}}{3M_\mathrm{S}}}\,d_\mathrm{T\text{-}S}.$$

f) Como la intensidad de radiación solar en la Tierra es $I_\mathrm{T}=1361\ \mathrm{W/m^2}$, la potencia que emite el Sol es $P_\mathrm{S}=I_\mathrm{T}4\pi d_\mathrm{T\text{-}S}{}^2$. Por tanto, la intensidad sobre el telescopio, situado a distancia $r=151.5\cdot 10^6$ km del Sol, será

$$I=\frac{P_\mathrm{S}}{4\pi r^2}=\frac{I_\mathrm{T}4\pi d_\mathrm{T\text{-}S}{}^2}{4\pi r^2}=\left(\frac{d_\mathrm{T\text{-}S}}{r}\right)^2 I_\mathrm{T}=1334\ \mathrm{W/m^2}.$$

g) La superficie del espejo (del apartado a) es $A_\mathrm{W}=26.3\ \mathrm{m^2}$. Como la intensidad de radiación solar que llega (según el apartado f) es $I=1334\ \mathrm{m^2}$, durante 1 minuto el espejo recibirá una energía total

$$E=I\,A_\mathrm{W}t=1334\cdot 26.3\cdot 60=2.1\cdot 10^6\ \mathrm{J}.$$

Como toda la energía se convierte en calor y la masa total del espejo (las 18 piezas) es $18\cdot 20=360$ kg, podemos despejar el incremento de temperatura que se produciría:

$$E=2.1\cdot 10^6\ \mathrm{J}=Q=mc_\mathrm{Be}\Delta T=360\cdot 1830\cdot\Delta T \quad\rightarrow\quad \Delta T=3.2\ \mathrm{^\circ C}.$$

h) El parasol tiene una superficie $S=21\cdot 14=294\ \mathrm{m^2}$. Como la presión de radiación es $p=2I/c$, la fuerza sobre el parasol es

$$F_\mathrm{rad}=pS=2IS/c=2.6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N},$$

donde hemos utilizado el valor de la intensidad calculado en el apartado f.

La fuerza gravitatoria sobre el telescopio es

$$F_\mathrm{g}=m\frac{v^2}{r}=m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2\frac{1}{r}=m\frac{4\pi^2 r}{T^2}=6200\frac{4\pi^2\cdot 151.5\cdot 10^9}{(365\cdot 24\cdot 3600)^2}=37.3\ \mathrm{N}.$$

Por tanto, la fuerza de la radiación solar es 4 órdenes de magnitud menor que la fuerza gravitatoria.

(Aunque este efecto de "vela solar" es muy pequeño, debe compensarse periódicamente mediante los motores a bordo para mantener siempre al telescopio en su órbita.)