P3. Un prototipo de "gato" termodinámico.

Un estudiante aficionado a la física y a la tecnología ha ideado un dispositivo capaz de funcionar como un *gato* que permita levantar cuerpos a pequeñas alturas.

El dispositivo consiste en un tubo cilíndrico vertical con secciones diferentes; en la parte superior tiene un radio $r_1 = 9{,}00\,\text{cm}$ y en la inferior $r_2 = 7{,}00\,\text{cm}$, tal como se representan en la figura 1. Dentro del tubo hay dos émbolos de masas $M_1 = 4{,}00\,\text{kg}$ y $M_2 = 0{,}900\,\text{kg}$, unidos mediante una cadena inextensible, de longitud $L = 1{,}00\,\text{m}$ y masa $m_c = 0{,}100\,\text{kg}$. Los émbolos, que ajustan perfectamente en el tubo, pueden deslizar sin fricción. Todos los materiales con los que se ha construido el sistema son perfectos aislantes del calor.

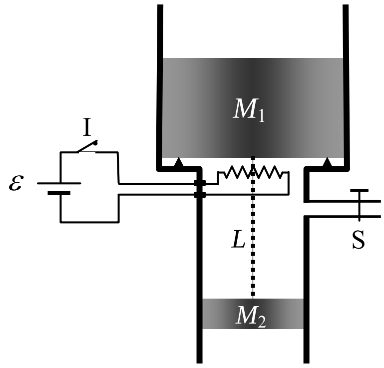

Fig. 1

Mediante la llave S se puede igualar la presión del espacio comprendido entre los émbolos con la atmosférica del exterior, $p_{at} = 1{,}01 \times 10^5\,\text{Pa}$. Con la llave S abierta, la base inferior de M_1 se apoya sobre unos pequeños pivotes que tienen como objeto, entre otros, dejar espacio para alojar una resistencia eléctrica de calefacción que se alimentada con una batería ε cuando se cierre el interruptor I.

Se supone que en el estado inicial (que es el representado en la figura 1), la temperatura de todo el sistema es la ambiente, $T_a = 3{,}00 \times 10^2\,\text{K}$. A continuación, se cierra la llave S y se mantiene cerrada en todo lo que sigue. Considere que el aire se comporta como un gas perfecto diatómico[1] de densidad $\rho = 1{,}29\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$.

1º Determine la masa de aire, m_{aire}, encerrada entre los émbolos. Compruebe que esta masa es mucho menor que la del sistema deslizante (émbolos + cadena) y, por tanto, puede despreciarse en los cálculos del problema.

2º Con objeto de levantar los émbolos (gato termodinámico), al aire encerrado entre ambos se le suministra lentamente calor mediante una resistencia eléctrica. En consecuencia, la presión interior variará. ¿Cuál es el valor de la presión crítica, p_c, para la cual los émbolos comenzarán su ascenso? ($g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$).

3º Desde el estado inicial hasta que los émbolos comienzan a ascender,

- 3a) ¿Qué tipo de proceso termodinámico ha tenido lugar?
- 3b) ¿Cuál es la temperatura, T_1, del aire al comenzar el ascenso?
- 3c) ¿Cuánto calor, Q_1, habrá sido necesario suministrar para que M_1 empiece a ascender?

4º Una vez que M_1 despega, se produce la acción útil del gato elevando este émbolo hasta una altura $h = 20{,}0\,\text{cm}$. Supóngase que la elevación es muy lenta para poder despreciar la energía cinética del sistema.

- 4a) ¿Qué tipo de proceso termodinámico ha tenido lugar?
- 4b) Calcule la temperatura, T_2, del gas al final de este proceso.
- 4c) ¿Cuánto calor adicional, Q_2, habrá sido necesario suministrar al gas?

5º Si se considera como *trabajo útil* el necesario para levantar el émbolo M_1 la altura *h*, calcule la relación, expresada en %, entre dicho trabajo y el calor total suministrado, lo que puede llamarse *rendimiento,* η*, del proceso*.

[1] Calores específicos molares de un gas ideal diatómico, a presión y a volumen constante: $c_v = 5R/2$; $c_p = 7R/2$, donde R es la constante de los gases perfectos.

6º Para que el sistema evolucione lentamente, el suministro de calor se realiza mediante una resistencia $r = 1{,}00\,\mathrm{k\Omega}$ conectada a una batería, de resistencia interna despreciable y fuerza electromotriz $\varepsilon = 50{,}0\,\mathrm{V}$. Calcule el tiempo, *t*, que deberá estar conectada la batería durante todo el proceso.

7º Represente en un diagrama Presión-Volumen el proceso seguido por el gas (aire) desde el estado inicial hasta que M_1 haya subido la altura *h*.

Solución

1º Cuando se cierra la válvula S la masa de aire encerrada es (despreciando el volumen de la parte ancha del tubo en la que se encuentran los pequeños pivotes y el de la conexión a la llave S):

$$\boxed{m_{aire} = \rho_{aire}\,\pi\, r_2^2 L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_{aire} = 1{,}99 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}}$$

$$m_{aire} << M_1, M_2 \ \text{o}\ m_c$$

2º Cuando la llave S se cierra, antes de comunicar calor, el aire encerrado entre los émbolos está a la presión atmosférica. Los pivotes que sujetan al conjunto móvil ejercen unas fuerzas normales cuya resultante es:

$$N_0 = \left(M_1 + M_2 + m_c\right) g$$

Al conectar el interruptor I comenzará la transferencia de calor y la presión del aire interior aumentará. Para una presión $p = p_{at} + \Delta p$, la resultante de las fuerzas de presión sobre los émbolos es $p\,\Delta A - p_{at}\,\Delta A = \Delta p \Delta A$ hacia arriba, por lo que el valor de la reacción normal será:

$$N = \left(M_1 + M_2 + m_c\right) g - \Delta p\,\Delta A \qquad \text{con} \qquad \Delta A = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right) = 1{,}01 \times 10^{-2}\ \text{m}^2$$

A medida que aumente la presión en el interior, la normal disminuirá hasta que para un valor critico de la diferencia de presiones, Δp_c, se anule,

$$\Delta p_c = \frac{\left(M_1 + M_2 + m_c\right) g}{\Delta A}$$

De donde la presión crítica absoluta es

$$\boxed{p_c = p_{at} + \frac{\left(M_1 + M_2 + m_c\right) g}{\pi\,(r_1^2 - r_2^2)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_c = 1{,}06 \times 10^5\ \text{Pa}}$$

Como se observa, la presión sólo depende de la masa total y de la geometría del sistema móvil.

3a) Hasta que la presión alcanza el valor crítico, el volumen de aire encerrado entre los émbolos, $V_0 = \pi\, r_2^2 L$, no sufre variación, en consecuencia, sufre un proceso lento a volumen constante.

$$\boxed{\text{Tipo de proceso: a volumen constante (isocoro)}}$$

3b) Como la transferencia de calor se realiza lentamente, se puede suponer que todos los estados intermedios son de equilibrio (proceso cuasiestático). Por lo tanto, la ecuación de estado de los gases perfectos permite escribir:

$$\left.\begin{array}{l} p_{at} V_0 = nRT_a \\ p_c V_0 = nRT_1 \end{array}\right\}$$

Donde n es el número de moles del aire encerrado, R la constante de los gases, V_0 el volumen de aire inicial y T_1 la temperatura del aire correspondiente a la presión $p_{c\,c}$ que se trata de determinar.

Dividiendo las relaciones anteriores,

$$\boxed{T_1 = T_a \frac{p_c}{p_{at}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 = 314\,\text{K}}$$

3c) En este proceso a volumen constante, el calor Q_1 que ha sido necesario aportar viene dado por

$$Q_1 = n c_v \left(T_1 - T_a\right)$$

Teniendo en cuenta que $c_v = 5R/2$ y que n es

$$n = \frac{p_{at} V_0}{RT_a}$$

La expresión del calor resulta ser

$$\boxed{Q_1 = \frac{5}{2}\, p_{at}\pi\, r_2^2\left(\frac{T_1}{T_a} - 1\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_1 = 188\ \text{J}}$$

4a) A partir del estado en el que la presión es la crítica, los émbolos comienzan a elevarse manteniendo la presión del aire encerrado constante e igual a p_c y, aumentando tanto el volumen del aire encerrado como su temperatura. El proceso se realiza, lentamente, a presión constante:

$$\boxed{\text{Tipo de proceso: a presión constante (isobaro)}}$$

4b) Razonando de forma análoga que en el apartado 3b, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} p_c V_0 = nRT_1 \\ p_c\left(V_0 + \Delta V\right) = nRT_2 \end{array}\right\}$$

Donde T_2 es la temperatura final del sistema y ΔV la variación total del volumen de aire correspondiente a la elevación de los émbolos la altura *h*, cuyo valor es $\Delta V = h\Delta A$. Dividiendo las expresiones anteriores y despejando T_2,

$$\boxed{T_2 = T_1\left(1 + \frac{h\left(r_1^2 - r_2^2\right)}{r_2^2 L}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_2 = 356\,\text{K}}$$

4c) Ahora el proceso es a presión constante, el calor Q_2 aportado será

$$Q_2 = nc_p\left(T_2 - T_1\right)$$

Teniendo en cuenta que $c_p = 7R/2$ y que el no ha variado el número de moles, resulta

$$\boxed{Q_2 = \frac{7}{2}\frac{p_{at}\pi\, r_2^2}{T_a}\left(T_2 - T_1\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_2 = 745\ \text{J}}$$

5º Trabajo útil: el que es preciso realizar para elevar el bloque M_1 hasta una altura *h*:

$$W_{útil} = M_1 g\, h$$

Energía aportada total:

$$W = Q_1 + Q_2$$

El rendimiento es:

$$\eta = \frac{W_{útil}}{Q_1 + Q_2}\times 100 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = \frac{M_1 g\, h}{Q_1 + Q_2}\times 100} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = 0{,}84\,\%}$$

Realmente el gato diseñado es deplorable.

6º El suministro de calor se hace de acuerdo con la ley de Joule:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{\varepsilon^2}{r}t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon^2}r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 373\,\text{s} = 6{,}22\,\text{min}}$$

7º Como antes hemos indicado, los procesos pueden considerarse cuasiestáticos, por lo tanto susceptibles de ser representados en un diagrama P-V. La primera fase del proceso, isocora, la segunda, isobara, están representadas cualitativamente (y no a escala) en la figura 3.

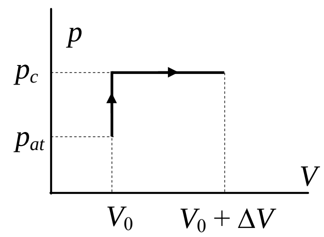

Fig. 3