P3. Paseando una espira por un campo magnético.

Una espira cuadrada de lado b, resistencia eléctrica R y masa m, está montada sobre un carrito de madera que puede moverse sobre una superficie horizontal con rozamiento despreciable. Un ciudadano empuja el carrito, como se muestra en la figura 1, haciendo que la espira atraviese la región sombreada en la figura, de longitud $L = 2b$, en la que existe un campo magnético B uniforme, perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia adentro. El ciudadano tiene que esforzarse para que durante todo el recorrido la velocidad de la espira sea siempre la misma, V.

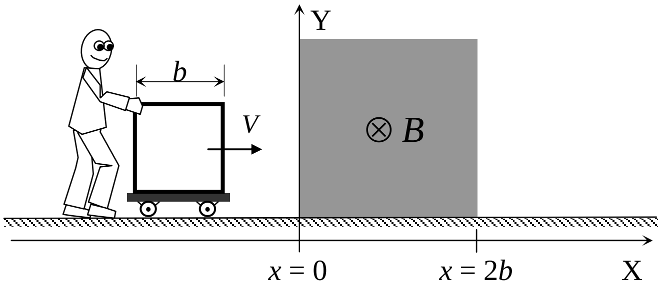


Fig. 1

En la figura se han incluido unos ejes de coordenadas para tener bien definida la posición de la espira en todo momento. Considera como coordenada x la distancia del eje Y al borde derecho de la espira.

a) Determina el flujo magnético $\Phi(x)$ que atraviesa la espira en los siguientes rangos de x:

a₁) $\Phi(x \le 0)$ a₂) $\Phi(0 \le x \le b)$ a₃) $\Phi(b \le x \le 2b)$ a₄) $\Phi(2b \le x \le 3b)$ a₅) $\Phi(3b \le x)$

b) Haz una representación gráfica de $\Phi(x)$ en el rango $x = -b$ a $x = 4b$.

c) Determina el valor absoluto de la fuerza electromotriz, inducida en la espira, $\varepsilon(x)$,en los siguientes rangos:

c₁) $\varepsilon(x \le 0)$ c₂) $\varepsilon(0 \le x \le b)$ c₃) $\varepsilon(b \le x \le 2b)$ c₄) $\varepsilon(2b \le x \le 3b)$ c₅) $\varepsilon(3b \le x)$

d) Representa gráficamente la intensidad de la corriente inducida que circula por la espira en función de x. Considera que la intensidad es positiva cuando recorre la espira en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

e) Determina la fuerza que el ciudadano tiene que ejercer sobre la espira para que su velocidad permanezca constante e igual a V en los siguientes rangos de x:

e₁) $F(x \le 0)$ e₂) $F(0 \le x \le b)$ e₃) $F(b \le x \le 2b)$ e₄) $F(2b \le x \le 3b)$ e₅) $F(3b \le x)$

Ahora la protagonista es una ciudadana que en vez de arrastrar el carrito con la espira, le da un empujón imprimiéndole una velocidad v_0, como se muestra en la figura 2.

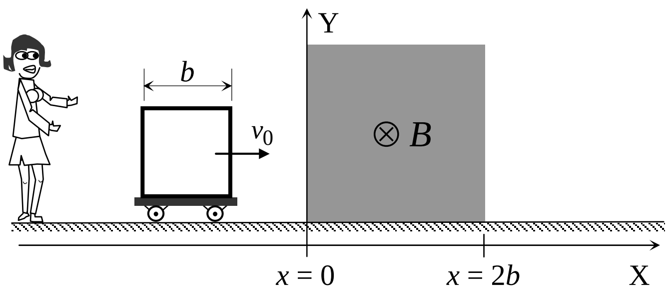


Fig. 2

f) ¿Cuál es la mínima velocidad v_0 que la ciudadana debe imprimir al carrito para que la espira entre completamente en la región del campo magnético?

En este último apartado, seguramente te serán útiles las siguientes relaciones:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

Solución

a) El flujo de un campo magnético uniforme que atraviesa perpendicularmente una superficie de área S es:

$$\Phi = B\,S\ .$$

a_1) $\boxed{\Phi\left(x \le 0\right) = 0}$

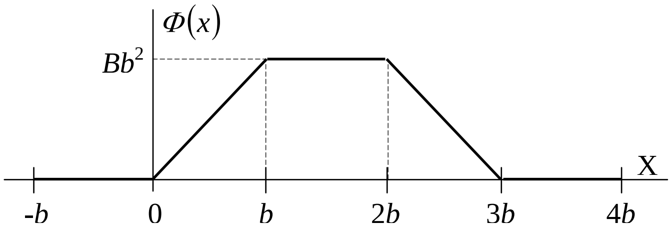
a_2) $\boxed{\Phi\left(0 \le x \le b\right) = B\,b\,x}$

a_3) $\boxed{\Phi\left(b \le x \le 2b\right) = B\,b^2}$

a_4) $\boxed{\Phi\left(2b \le x \le 3b\right) = B\,b\left(3b - x\right)}$

a_5) $\boxed{\Phi\left(3b \le x\right) = 0}$

b) La representación correspondiente es:



c) De acuerdo con la ley de Faraday-Lenz,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt}$$

el valor absoluto de la fem inducida en la espira es:

c_1) $\boxed{\varepsilon\left(x \le 0\right) = 0}$

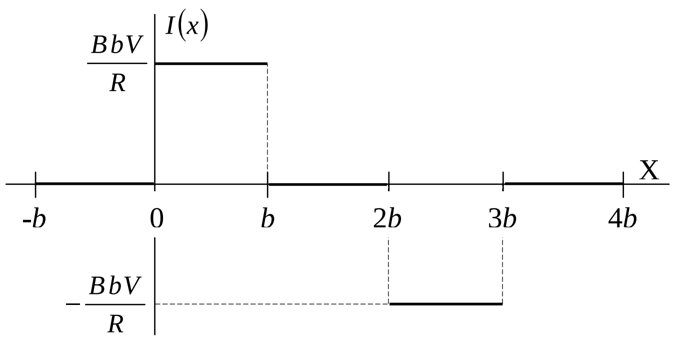
c_2) $\boxed{\varepsilon\left(0 \le x \le b\right) = B\,b\,V}$

c_3) $\boxed{\varepsilon\left(b \le x \le 2b\right) = 0}$

c_4) $\boxed{\varepsilon\left(2b \le x \le 3b\right) = B\,b\,V}$

c_5) $\boxed{\varepsilon\left(3b \le x\right) = 0}$

d) La representación gráfica de la intensidad que circula por la espira $\left(I = \varepsilon / R\right)$, de acuerdo con el convenio de signos establecido en el enunciado, es:



e) Cuando la espira está en $x \le 0$, $b \le x \le 2b$ o $3b \le x$ la fuerza de interacción con el campo magnético es nula; sin embargo, tanto en $0 \le x \le b$, como en $2b \le x \le 3b$ la fuerza de Lorentz es $F = IBb$, horizontal y dirigida hacia la izquierda.

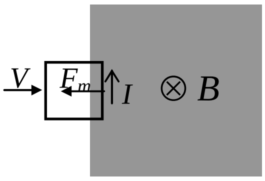


Fig. 3

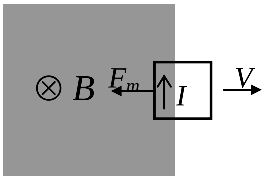


Fig. 4

Por lo tanto, sólo en ambos tramos, para que la espira se mueva con velocidad constante *V*, es decir, con aceleración nula, el ciudadano deberá “esforzarse” aplicando una fuerza igual y de sentido contrario a F_m.

Como en dichos tramos el valor absoluto de la intensidad de la corriente inducida es

$$I = \frac{BbV}{R}$$

Resulta que la fuerza con la que el ciudadano deberá empujar es:

$$\boxed{F = \frac{B^2 b^2 V}{R}}$$ “Horizontal y hacia la derecha”

f) Una vez que la ciudadana “lanza” el carrito con la espira, el movimiento es uniforme hasta que comience a entrar en el campo. A partir de ahí, la fuerza de Lorentz debida a la intensidad inducida, que actúa sobre el lado derecho de la espira, frenará su movimiento.

Si *v* es la velocidad de la espira cuando está a la distancia *x*, e *I* la intensidad de la corriente inducida en ese instante, el módulo de la fuerza de Lorentz vendrá dada por:

$$f_m = B\,b\,I$$

siendo $I = \frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$

Por otra parte,

$$\Phi = B\,b\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} = B\,b\,\frac{dx}{dt} = B\,b\;v \quad \Rightarrow \quad f_m = \frac{B^2\,b^2}{R}v$$

Recordando que f_m se opone a la velocidad, que “frena” la espira, en virtud de la segunda ley de Newton,

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2\,b^2}{R}v$$

Ahora es cuando viene bien tener en consideración la “ayuda” del final del apartado d ya que con ella se puede escribir,

$$\frac{dv}{dx}v = -\frac{B^2\,b^2}{m\,R}v \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{B^2\,b^2}{m\,R}dx$$

Si v_0 es la mínima velocidad con la que la ciudadana lanza el carrito para que entre enteramente en la región del campo magnético y se pare, o lo que es lo mismo que $v = 0$ en $x = b$, integrando la anterior ecuación, se obtiene

$$\int_{v_0}^{0} dv = -\frac{B^2\,b^2}{m\,R}\int_0^b dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \frac{B^2\,b^3}{m\,R}}$$