P3. El fracaso del átomo clásico.

En los albores de las investigaciones sobre el átomo, a principios del siglo XX, se pensaba que éste tenía una estructura similar a un sistema planetario con el núcleo en el centro, muy pesado y cargado positivamente, y los ligeros electrones girando a su alrededor, ligados por la atracción coulombiana. (Figura 1)

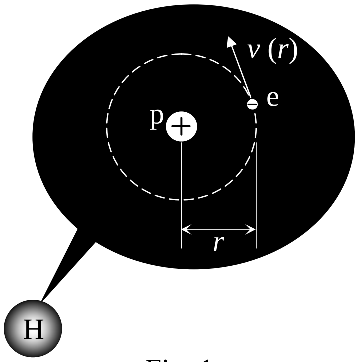

Fig. 1

Pronto se descubrió que las cosas no podían ser tan simples: las cargas eléctricas cuando se mueven con aceleración, como los electrones orbitando alrededor del núcleo, pierden energía en forma de radiación electromagnética, por lo que los electrones atómicos se precipitarían hacia el núcleo en un tiempo muy breve. Está claro que no sucede así, puesto que la materia normal es estable y ustedes están aquí.

Este problema tiene por objeto hacer una estimación, clásica y no relativista, del tiempo que tardaría en aniquilarse un átomo de hidrógeno según las teorías clásicas de la mecánica y de la radiación, partiendo del hecho de que la energía de ionización de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental o no excitado es $E_{ioniz} = 13{,}6\,\mathrm{eV}$.

a) Suponiendo que la órbita del electrón es circular de radio r, obtenga las expresiones de la energía total del electrón E, de su velocidad v, de su aceleración a y de su periodo de revolución T, en función de la energía total E_0 del átomo de hidrógeno en el estado no excitado y del radio r_0 de la órbita circular en dicho estado.

b) Determine y calcule E_0 y r_0 así como la velocidad, la aceleración y el periodo en esta órbita, v_0, a_0, y T_0, respectivamente.

Cuando un electrón se mueve con aceleración a, la potencia radiante que emite viene dada por la fórmula de Larmor:

$$P = \frac{2}{3}\frac{k\,e^2}{c^3}a^2$$

en la que k es la constante de Coulomb, c la velocidad de la luz y e la carga elemental

c) Al perder energía, el electrón irá describiendo órbitas de radio cada vez menor. Halle la expresión de la potencia emitida P en función del radio r de la órbita circular del electrón, de r_0 y de E_0.

Puede comprobar que tanto $E(r)$ como $P(r)$ tienden a infinito cuando $r \to 0$. Este absurdo físico es consecuencia de que en las antiguas teorías se idealizaba al electrón y al protón considerándolos como partículas puntuales. Pasemos por alto estos inconvenientes y vayamos al objetivo de este ejercicio:

d) ¿Cuál es el tiempo τ que le costaría a un electrón "caer" sobre el núcleo desde la órbita del estado fundamental de radio r_0?

AYUDA: La potencia radiada por el electrón (fórmula de Larmor) tiene que ser igual a la variación (con signo negativo) de la energía mecánica del electrón por unidad de tiempo, $-dE/dt$. Esta variación representa una pérdida de energía, de ahí el signo negativo.

Le resultarán útiles las siguientes expresiones:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad dt = \frac{1}{dE/dt}\frac{dE}{dr}dr$$

El tiempo τ lo obtendrá integrando entre los valores inicial y final de t y de r. (La integral es inmediata).

DATOS: $1\,\mathrm{eV} = 1.60 \times 10^{-19}$ J : masa del electrón $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg : constante de Coulomb $k = 8{,}99 \times 10^{9}\ \mathrm{N\,m^2C^{-2}}$: velocidad de la luz $c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$;
carga elemental $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C .

CONCLUSIÓN: Si ha llegado al final del problema comprobará que la vida de un átomo según la teoría clásica es muy corta. El átomo clásico es un fracaso. La teoría cuántica es la que describe correctamente la estabilidad de la materia, prediciendo además las propiedades de los átomos.

Solución

a) La energía mecánica del electrón en una órbita de radio r es

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - k \frac{e^2}{r} \qquad (1)$$

Como la fuerza que actúa sobre el electrón es central y describe una órbita circular, su velocidad angular es constante, por lo que su aceleración es sólo centrípeta y se verificará

$$k \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad m_e v^2 = k \frac{e^2}{r},$$

sustituyendo en (1)

$$E = -\frac{1}{2} \frac{ke^2}{r} \qquad \text{o también} \qquad E = -\frac{1}{2} m_e v^2 \qquad (2)$$

En el estado fundamental, $r = r_0$, luego

$$E(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{ke^2}{r_0} = E_0 \qquad \Rightarrow \qquad ke^2 = -2E_0 \, r_0 \qquad (3)$$

Por lo tanto

$$\boxed{E = E_0 \frac{r_0}{r}} \qquad (4)$$

Despejando v de (2) y teniendo en cuenta (4) se tiene

$$\boxed{v = \sqrt{-\frac{2E_0 \, r_0}{m_e \, r}}}$$

En cuanto a la aceleración, *a*, y el periodo, *T*,

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = -\frac{2E_0 \, r_0}{m_e \, r^2}} \qquad (5)$$

$$v = \frac{2\pi}{T} r \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m_e}{-2E_0 \, r_0}} \, r^{3/2}}$$

b) Como la energía de ionización es la mínima energía que hay que comunicar a un átomo para arrancarle un electrón (y que alcance el infinito con velocidad cero), se puede escribir

$$E_0 + E_{ioniz} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_0 = -E_{ioniz}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_0 = -13{,}6\,\text{eV} = -2{,}18 \times 10^{-18}\ \text{J}}$$

De (3), el valor de r_0 es

$$\boxed{r_0 = -\frac{ke^2}{2E_0}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r_0 = 5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m}}$$

Si en el resto de expresiones anteriores hacemos $r = r_0$ se obtiene

$$\boxed{v_0 = \sqrt{-\frac{2E_0}{m_e}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_0 = 2{,}19 \cdot 10^6\ \text{m/s}}$$

$$\boxed{a_0 = -\frac{2E_0}{m_e \, r_0}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_0 = 9{,}05 \cdot 10^{22}\ \text{m/s}^2}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_e}{-2E_0}}\, r_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_0 = 1{,}52\cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}}$$

c) Llevando a la fórmula de Larmor las anteriores expresiones (3) y (5), se obtiene

$$\boxed{P = -\frac{16}{3}\frac{E_0^3\, r_0^3}{m_e^2\, c^3}\frac{1}{r^4}} \tag{6}$$

d) La potencia radiada tiene que ser igual a la variación (con signo negativo) de la energía mecánica del electrón por unidad de tiempo, es decir:

$$P = -\frac{dE}{dt}$$

Luego, teniendo en cuenta la "ayuda"

$$dt = \frac{1}{dE/dt}\frac{dE}{dr}dr \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{1}{P(r)}\frac{dE}{dr}dr$$

Derivando en (4)

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{E_0\, r_0}{r^2}$$

Teniendo en cuenta además la expresión (6) queda

$$dt = -\frac{3}{16}\frac{c^3 m_e^2}{E_0^2\, r_0^2} r^2 dr$$

Integrando desde un instante inicial, $t = 0$ en el que $r = r_0$, hasta un instante $t = \tau$ en el que $r = 0$, esto es

$$\int_0^{\tau} dt = -\frac{3}{16}\frac{c^3 m_e^2}{E_0^2\, r_0^2}\int_{r_0}^{0} r^2 dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{1}{16}\frac{c^3 m_e^2}{E_0^2} r_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 1{,}56\times 10^{-11}\ \mathrm{s}}$$